Khôlles 23 et 24 : APPLICATIONS LINÉAIRES

1. $\mathscr{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois usuelles.
Si E est F sont de dimensions finies, alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et
$\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.

2. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On a :
- Pour tout sous-espace vectoriel E_1 de E, $u(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F.
- Pour tout sous-espace vectoriel F_1 de F, $u^{-1}(F_1)$ est un sous-espace vectoriel de E.

3. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
- Si $\mathscr{F}$ est une famille de vecteurs de E, alors on a : $u\left(\text{Vect}(\mathscr{F})\right) = \text{Vect}\left(u(\mathscr{F})\right)$.
- u est surjective si, et seulement si l'image par u d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.
- u est injective si, et seulement si l'image par u d'une famille libre de E est une famille libre de F.
- u est bijective si, et seulement si l'image d'une base de E est une base de F.

4. Soit p une application de E dans E. Alors p est un projecteur $\Leftrightarrow \begin{cases} p \text{ linéaire} \\ p \circ p = p \end{cases}$.
Dans ce cas, p est le projecteur sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.