Khôlles 25 et 26 : INTEGRATION - PROBABILITÉS

I. INTÉGRATION

1. Inégalité de Cauchy Schwarz pour les intégrales
Soient f et g deux fonctions réelles continues sur $[a, b]$. On a :

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x \int_a^b g(x)^2\mathrm{d}x$$

2. Inégalité de Taylor-Lagrange :
Soit f une fonction réelle ou complexe, de classe C^{n+1} sur $[a, b]$. on a :

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leq \left|\sup_{x\in[a,b]} f^{(n+1)}(x)\right| \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

II. PROBABILITÉS

1.
- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- Soit E un événement de Ω. Alors on a : $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$ et $\mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E)$.
- Soit $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille d'événements de Ω deux à deux incompatibles. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i)$$

- Soient E_1 et E_2 deux événements de Ω. Alors

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - \mathbb{P}(E_1 \cap E_2)$$

- Soient E_1 et E_2 deux événements de Ω. Si $E_1 \subset E_2$ alors $\mathbb{P}(E_1) \leq \mathbb{P}(E_2)$.

2. Si A et B sont deux événements indépendants, alors A et $\overline{B}$ le sont également.

3. Espérance et variance d'une loi de Bernoulli et d'une loi binomiale. (Expression et démonstration).

4. **Inégalité de Markov** et **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** (Énoncés et démonstration)