

CHAP 15 - DENOMBREMENT - PROBABILITES

1 Dénombrement

Dans ce paragraphe, on note $F_n = \llbracket 1, n \rrbracket$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
 p désigne un entier naturel, inférieur ou égal à n .

1.1 Ensembles finis

Définition 1

On dit qu'un ensemble E est **fini, de cardinal** n s'il est en bijection avec F_n .

On note $\text{Card}(E) = n$, ou $|E| = n$.

Par convention, on dira que l'ensemble vide est de cardinal 0.

Proposition 1

Si B est une partie d'un ensemble fini A , alors B est un ensemble fini, et $\text{Card}(B) \leq \text{Card}(A)$.

Il y a égalité si, et seulement si $A = B$.

Proposition 2

Si B est une partie d'un ensemble fini A , alors

$$\text{Card}(B^C) = \text{Card}(A) - \text{Card}(B)$$

Proposition 3

Si A et B sont deux ensembles finis, alors $A \cup B$ est un ensemble fini, et

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

$$\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B)$$

Proposition 4

Si $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une famille d'ensembles finis, alors $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ est un ensemble fini, et

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(A_1) \text{Card}(A_2) \cdots \text{Card}(A_n)$$

Proposition 5

Pour tout ensemble fini E , l'ensemble des parties de E , $\mathcal{P}(E)$, est un ensemble fini, et

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}$$

Proposition 6

Soient A et B deux ensembles finis de cardinaux n et m respectivement.

Le nombre d'applications de A dans B est m^n .

Proposition 7

Soient A et B deux ensembles finis de même cardinal, et f une application entre A et B . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) f est bijective
- (ii) f est injective
- (iii) f est surjective

1.2 Permutation

Définition 2

On appelle **permutation** de F_n toute bijection de F_n sur F_n .

On note σ_n l'ensemble des permutations de F_n .

Proposition 8

σ_n est un ensemble fini et

$$\text{Card}(\sigma_n) = n!$$

1.3 Arrangement

Définition 3

On appelle **arrangement de p éléments d'un ensemble E de cardinal n** tout p -uplet (x_1, x_2, \dots, x_p) d'éléments distincts de E . Le nombre d'arrangements de p éléments de E se note A_n^p .

Exemple 1

$(2, 1, 4)$ et $(1, 2, 4)$ sont deux arrangements de 3 éléments de F_4 .

Remarque 1

(a) La donnée d'un arrangement de p éléments d'un ensemble de cardinal n revient à la donnée d'une application injective de F_p dans F_n .

Plus précisément, il y a une bijection entre les applications injectives de F_p dans F_n et l'ensemble des arrangements de p éléments d'un ensemble de cardinal n .

(b) $A_n^1 = n$ et $A_n^n = n!$

Proposition 9

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

1.4 Combinaison

Définition 4

On appelle **combinaison de p éléments d'un ensemble E de cardinal n** toute partie de p éléments distincts de E .

Proposition 10

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble de cardinal n est

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Remarque 2

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Proposition 11

- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

- **Formule de Pascal** : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$

2 Probabilité sur un ensemble fini

2.1 Vocabulaire des événements

Définition 5

L'ensemble de toutes les issues possibles, ou **éventualités**, d'une **expérience aléatoire** (soumise au hasard) est appelé **ensemble fondamental**, ou **univers**, que l'on notera par la suite Ω .

Définition 6

- Un **événement** est un sous-ensemble de l'univers Ω .
- Un **événement élémentaire**, ou **singleton**, est un événement ne contenant qu'une seule éventualité.
- \emptyset est dit **événement impossible**.
- L'univers Ω est dit **événement certain**.

Définition 7

Etant donné un événement E dans un univers Ω , la négation de l'événement E , ou **événement contraire** de E , noté \overline{E} , est l'événement qui se réalise quand E ne se réalise pas, et qui ne se réalise pas quand E se réalise.

Il est composé des éventualités de Ω qui ne sont pas dans E : c'est le complémentaire dans Ω de E .

Définition 8

Soient E_1 et E_2 deux événements de Ω .

- L'événement " E_1 et E_2 ", noté $E_1 \cap E_2$ est constitué des éventualités qui appartiennent à la fois à E_1 et à E_2 .
- Si $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, on dit que E_1 et E_2 sont **incompatibles**.
- L'événement " E_1 ou E_2 ", noté $E_1 \cup E_2$ est constitué de toutes les éventualités de E_1 et de toutes celles de E_2 .

2.2 Espace probabilisé

Définition 9

On appelle **probabilité** sur un ensemble fini Ω toute application \mathbb{P} de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ vérifiant :

$$\star \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$\star \forall (A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2, \quad A \cap B = \emptyset \implies \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

Le couple (Ω, \mathbb{P}) est appelé **espace probabilisé**.

On se place désormais dans un espace probabilisé (Ω, \mathbb{P}) , où Ω est un univers fini.

Définition 10

On appelle **distribution de probabilités** sur un ensemble E une famille de réels positifs, indexée sur E et de somme 1.

Remarque 3

Une probabilité \mathbb{P} est entièrement déterminée sur $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ par la distribution de probabilités $(\mathbb{P}(\omega_i))_{1 \leq i \leq n}$.

Proposition 12

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- Soit E un événement de Ω . Alors on a : $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$ et $\mathbb{P}(\overline{E}) = 1 - \mathbb{P}(E)$.
- Soit $(E_i)_{i \in [1, n]}$ une famille d'événements de Ω deux à deux incompatibles. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E_i)$$

- Soient E_1 et E_2 deux événements de Ω . Alors

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - \mathbb{P}(E_1 \cap E_2)$$

- Soient E_1 et E_2 deux événements de Ω . Si $E_1 \subset E_2$ alors $\mathbb{P}(E_1) \leq \mathbb{P}(E_2)$.

Définition 11

Lors d'une expérience aléatoire sur un univers Ω , lorsque chaque éventualité a la même probabilité de se réaliser, on dit qu'il y a **équiprobabilité** sur l'univers.

Proposition 13

Lorsqu'il y a équiprobabilité sur un univers Ω , pour tout événement E on a :

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)}$$

En particulier, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(\omega_i) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$.

2.3 Conditionnement et indépendance

Définition 12

Soient A et B des événements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

La probabilité que l'événement A se réalise sachant que l'événement B est réalisé est définie par

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

et se lit **probabilité de A sachant B** .

Par convention, $\mathbb{P}(A|B) \mathbb{P}(B) = 0$ si $\mathbb{P}(B) = 0$.

Proposition 14

L'application \mathbb{P}_B définit une probabilité sur Ω ; elle vérifie notamment pour tout événement A : $0 \leq \mathbb{P}_B(A) \leq 1$ et $\mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}_B(\bar{A}) = 1$.

Remarque 4

Le "conditionnement" revient à changer d'univers : on se place dans l'univers B .

Proposition 15 Formule des probabilités composées

Soient E_1, E_2, \dots, E_n des événements tels que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} E_i\right) \neq 0$, alors on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right) = \mathbb{P}(E_1) \mathbb{P}(E_2|E_1) \mathbb{P}(E_3|E_1 \cap E_2) \cdots \mathbb{P}\left(E_n \left| \bigcap_{i=1}^{n-1} E_i \right.\right)$$

Définition 13

On dit que deux événements A et B sont **indépendants** si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$.

Remarque 5

En pratique, on peut se trouver dans deux situations :

- Soit on connaît la loi de probabilité et on cherche à savoir si deux événements sont indépendants, on doit alors vérifier par le calcul si l'égalité $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$ est vérifiée ;
- Soit on sait que les événements sont indépendants et on utilise l'égalité $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$ dans les calculs pour déterminer d'autres probabilités.

Remarque 6

Si A et B sont deux événements indépendants de probabilités non nulles, alors $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.

Proposition 16

Si A et B sont deux événements indépendants, alors A et \overline{B} le sont également.

Définition 14

On dit que les événements E_1, \dots, E_n sont **(mutuellement) indépendants** si

$$\forall I \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket), \quad \mathbb{P} \left(\bigcap_{i \in I} E_i \right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(E_i)$$

Attention ! L'indépendance des E_i deux par deux n'implique pas l'indépendance mutuelle.

Définition 15

On considère une expérience aléatoire constituée de l'enchaînement de n expériences aléatoires. Si chacune se déroule dans des conditions qui ne dépendent pas du résultat des autres, on dit que ces expériences sont **indépendantes**.

La probabilité d'un résultat final est alors obtenue par le produit des probabilités de chacun des n résultats intermédiaires.

Définition 16

Une **partition de l'univers** Ω est un ensemble d'événements non vides, deux à deux incompatibles, dont l'union est Ω .

Théorème 1 Formule des probabilités totales

Si $(E_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une partition de l'univers telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(E_i) \neq 0$ alors pour tout événement A , on a :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}_{E_i}(A) \mathbb{P}(E_i)$$

Remarque 7

En particulier, si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\overline{B}}(A)\mathbb{P}(\overline{B})$.

Théorème 2 Formule de Bayes

Si $(E_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une partition de l'univers telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(E_i) \neq 0$ alors pour tout événement A de probabilité non nulle, on a :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}_A(E_j) = \frac{\mathbb{P}_{E_j}(A) \mathbb{P}(E_j)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}_{E_i}(A) \mathbb{P}(E_i)}$$

3 Variables aléatoires

3.1 Généralités

Définition 17

Dans l'étude d'une expérience aléatoire, une **variable aléatoire** est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E .

Lorsque $E = \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite **réelle**.

Notations : Etant donnée une variable aléatoire X à valeurs dans un ensemble E , on notera :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\})$$

Définition 18

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble E . La **loi de probabilité de X** , notée P_X , est déterminée par la distribution de probabilités $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in E}$.

Si $A \in \mathcal{P}(E)$, on note $P_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$.

Remarque 8

L'univers Ω étant fini, une variable aléatoire définie sur Ω prend un nombre fini de valeurs :

$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Ainsi, pour déterminer P_X , il faut exprimer $\mathbb{P}(X = x_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On les représente souvent dans un tableau.

Proposition 17

Soient X une variable aléatoire réelle et f une application définie sur $X(\Omega)$. Alors $Y = f(X)$ est une variable aléatoire, et si $F = f(X(\Omega))$, pour toute partie B de F , on a : $P_Y(B) = P_X(f^{-1}(B))$

Définition 19

Soient X une variable aléatoire réelle, et A un événement de Ω de probabilité non nulle. On définit la **loi conditionnelle de X sachant A** par :

$$\forall B \in \mathcal{P}(X(\Omega)), \quad P_{X|A}(B) = \mathbb{P}_A(X \in B) = \frac{\mathbb{P}((X \in B) \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

3.2 Lois usuelles**3.2.1 Loi uniforme discrète****Définition 20**

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_1, \dots, x_n .

X suit une **loi uniforme discrète**, ou **loi équirépartie**, si

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}$$

On note $X \sim \mathcal{U}(x_1, \dots, x_n)$.

3.2.2 Loi de Bernoulli**Définition 21**

Une variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli de paramètre p** (avec $p \in [0, 1]$) si

$$X(\Omega) = \{0, 1\}, \quad \mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

On note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Remarque 9

Cette loi modélise toute expérience aléatoire ayant exactement deux issues arbitrairement appelées "succès" (pour $X = 1$) et "échec" (pour $X = 0$), avec respectivement les probabilités p et $1-p$.

Une telle expérience est appelée **expérience de Bernoulli de paramètre p** .

3.2.3 Loi binomiale**Définition 22**

Une variable aléatoire X suit une **loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$** si

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Remarque 10

Cette loi modélise toute expérience aléatoire consistant à répéter n fois une expérience de Bernoulli de paramètre p , dans des conditions identiques et indépendantes, la variable aléatoire X comptant le nombre de succès au cours des n expériences.

3.3 Couple de variables aléatoires

Définition 23

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω , prenant les valeurs x_1, \dots, x_n et y_1, \dots, y_m respectivement.

Déterminer la **loi du couple (X, Y)** , ou **loi conjointe du couple**, c'est trouver les nombres

$\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$ pour tous les couples $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket$.

Les lois de X et Y sont appelées **lois marginales du couple (X, Y)** .

$X \backslash Y$	x_1	x_2	...	x_n	Loi de Y
y_1	$\mathbb{P}((X; Y) = (x_1; y_1))$	$\mathbb{P}((X; Y) = (x_2; y_1))$...	$\mathbb{P}((X; Y) = (x_n; y_1))$	$\mathbb{P}(Y = y_1)$ ←
y_2	$\mathbb{P}((X; Y) = (x_1; y_2))$	$\mathbb{P}((X; Y) = (x_2; y_2))$...	$\mathbb{P}((X; Y) = (x_n; y_2))$	$\mathbb{P}(Y = y_2)$ ←
...
y_m	$\mathbb{P}((X; Y) = (x_1; y_m))$	$\mathbb{P}((X; Y) = (x_2; y_m))$...	$\mathbb{P}((X; Y) = (x_n; y_m))$	$\mathbb{P}(Y = y_m)$ ←
Loi de X	$\mathbb{P}(X = x_1)$	$\mathbb{P}(X = x_2)$...	$\mathbb{P}(X = x_n)$	1

Somme des valeurs de la colonne correspondante

Somme des valeurs de la ligne correspondante

Attention ! La connaissance de la loi conjointe donne les lois marginales, mais la connaissance des lois marginales ne donne pas la loi conjointe.

Définition 24

Soient X et Y deux variables aléatoires et $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) > 0$.

On appelle **loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$** la probabilité définie sur $Y(\Omega)$ par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(Y(\Omega)), \mathbb{P}_{X=x}(Y \in A) = \frac{\mathbb{P}((Y \in A) \cap (X = x))}{\mathbb{P}(X = x)}.$$

Remarque 11

Si on connaît la loi de X et les lois conditionnelles de Y sachant $(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) > 0$, alors on connaît la loi conjointe de X et Y .

3.4 Variables aléatoires indépendantes

Définition 25

Deux variables aléatoires X et Y sont dites **indépendantes** si pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$ et tout $B \in \mathcal{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.

Définition 26

Les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont dites **(mutuellement) indépendantes** si pour tout

$(A_1, \dots, A_n) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(X_i(\Omega))$, les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants.

Proposition 18

Si X_1, \dots, X_n sont n variables aléatoires indépendantes suivant une loi $\mathcal{B}(p)$, alors la variable aléatoire $X = X_1 + \dots + X_n$ suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Théorème 3

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, et si f et g sont des applications définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont des variables aléatoires indépendantes.

Proposition 19 Lemme des coalitions

Si les variables aléatoires réelles X_1, \dots, X_n sont indépendantes, et si f et g sont des applications définies respectivement sur \mathbb{R}^p et \mathbb{R}^{n-p} , $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, alors les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Remarque 12

Cette propriété s'étend au cas de plus de deux coalitions.

3.5 Caractéristiques d'une variable aléatoire discrète**3.5.1 Espérance mathématiques****Définition 27**

Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers fini Ω , telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. On définit l'**espérance mathématique de X** par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) X(\omega) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

Proposition 20

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, a et b des réels.

- $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$
- Si $X \leq Y$ (c'est-à-dire, $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega)$), alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$
- Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y)$.

Attention ! La réciproque est fautive.

Proposition 21

Soit X une variable aléatoire.

- Si X est constante égale à a , alors $\mathbb{E}(X) = a$.
- Si $X = 1_A$, où A est un événement non vide, alors $\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(A)$.
- Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $\mathbb{E}(X) = p$.
- Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $\mathbb{E}(X) = np$.

Théorème 4 Théorème de transfert

Soient X une variable aléatoire réelle et f une application à valeurs réelles définie sur $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Alors

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \mathbb{P}(X = x_i)$$

3.5.2 Variance, écart type et covariance**Définition 28**

Soit X une variable aléatoire réelle prenant un nombre fini de valeurs x_1, \dots, x_n . On appelle **variance de X** le réel

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x_i)$$

On appelle **écart type de X** le nombre

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Proposition 22 Formule de König - Huygens

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Proposition 23

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, a et b des réels.

- $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$.
- Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

Proposition 24

Soit X une variable aléatoire réelle.

- Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors $\text{Var}(X) = p(1 - p)$.
- si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $\text{Var}(X) = np(1 - p)$.

Définition 29

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On appelle *covariance* du couple (X, Y) le nombre :

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$$

Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites **décorrélées**.

Proposition 25

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On a :

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y)$$

Proposition 26

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. Si X et Y sont indépendantes, alors elles sont décorréélées.

3.5.3 Inégalités probabilistes**Proposition 27 Inégalité de Markov**

Si X est une variable aléatoire réelle **positive** alors pour tout réel $a > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Proposition 28 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle. Pour tout réel $a > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$$