Chap 3 - NOMBRES COMPLEXES

Dans l'ensemble de ce chapitre, on se place dans le plan usuel $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1 L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

1.1 Définition

Définition 1
On note i un nombre imaginaire.
On appelle **nombre complexe** tout nombre z qui s'écrit sous la forme $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des réels. Cette écriture s'appelle **forme algébrique** du nombre complexe.
x s'appelle la **partie réelle** de z ; on la note $x = \mathrm{Re}(z)$.
y s'appelle la **partie imaginaire** de z ; on la note $y = \mathrm{Im}(z)$.
L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$.

Remarque 1
(a) $z = z' \Leftrightarrow \big(\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \text{ et } \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')\big)$. En particulier $z = 0$ si, et seulement si $\mathrm{Re}(z)$=$\mathrm{Im}(z)$=0.
(b) On note $\mathbb{C}^*$ l'ensemble $\mathbb{C}$ privé de 0.
(c) Si $\mathrm{Im}(z) = 0$, z est un nombre réel.
(d) Si $\mathrm{Re}(z) = 0$, on dit que z est un **imaginaire pur**.

1.2 Représentation géométrique

Définition 2
L'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathscr{P}$ qui au nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ associe le point M de coordonnées (x, y) est une bijection.
On dit que z est **l'affixe** du point M et que M est **l'image ponctuelle** du nombre z.
L'application de $\mathbb{C}$ dans l'ensemble des vecteurs du plan qui au nombre complexe $z = x + iy$ associe le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées (x, y) est une bijection.
On dit que z est l'affixe du vecteur $\vec{w}$ et que $\vec{w}$ est l'image vectorielle de z.

2 Opérations sur les nombres complexes

2.1 Lois internes

On munit $\mathbb{C}$ de deux lois internes $+$ et $\cdot$ définies pour $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ où $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$ par :

$$z + z' = (x + x') + \mathrm{i}\,(y + y') \quad \text{et} \quad z \cdot z' = (xx' - yy') + \mathrm{i}\,(xy' + yx')$$

Remarque 2
(a) La loi $\cdot$ permet de trouver :

$$\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$$

Ainsi i est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -1$.
En appliquant ce résultat, on constate que les opérations dans $\mathbb{C}$ sont compatibles avec les opérations dans $\mathbb{R}$ et possèdent les mêmes propriétés :
- de commutativité : $z + z' = z' + z$ et $z \cdot z' = z' \cdot z$
- d'associativité : $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$ et $(z \cdot z') \cdot z'' = z \cdot (z' \cdot z'')$
- de distributivité : $z \cdot (z' + z'') = z \cdot z' + z \cdot z''$.

(b) Pour tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ il existe un nombre complexe, noté $-z$, tel que $z + (-z) = 0$.
C'est le nombre $-z = -x + \mathrm{i}(-y)$. On l'appelle **l'opposé** du nombre z.
Pour tous nombres complexes z et z', on notera $z - z' = z + (-z')$.

(c) Pour tout nombre complexe non nul $z = x + \mathrm{i}y$ il existe un nombre complexe, noté $\dfrac{1}{z}$ tel que $z \cdot \dfrac{1}{z} = 1$. C'est le nombre $\dfrac{1}{z} = \dfrac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}$.
Pour tous nombres complexes z et z', si $z' \neq 0$ on notera $\dfrac{z}{z'} = z \cdot \dfrac{1}{z'}$

2.2 Conjugaison

Définition 3
Soit $z = x + \mathrm{i}y$ un nombre complexe (x et y étant des réels). On définit le **nombre conjugué** de z par

$$\overline{z} = x - \mathrm{i}y$$

Proposition 1
Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. On a :
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$
- Si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{2}(z - \overline{z})$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$.
- Si $z = x + iy$ (avec x et y réels), alors $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$

3 Forme trigonométrique

3.1 Définition

Définition 4
Soient $z = x + \mathrm{i}y$ un nombre complexe et M son image ponctuelle.
La distance OM est appelée le **module** de z, noté $|z|$.
Si z est non nul, une mesure de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$ est appelée un **argument** de z, noté $\arg(z)$.

Remarque 3
Si θ_1 et θ_2 sont deux arguments d'un nombre complexe non nul, alors $\theta_1 \equiv \theta_2\ [2\pi]$.

Proposition 2
Soit $z \in \mathbb{C}^*$, tel que $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des réels. On note $\rho = |z|$ et $\theta \equiv \arg(z)\ [2\pi]$. Alors :

$$z = \rho\left(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\right)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos(\theta) = \frac{x}{\rho}, \quad \sin(\theta) = \frac{y}{\rho}$$

Proposition 3
Deux nombres complexes non nuls sont égaux si, et seulement si ils ont le même module et des arguments congrus modulo 2π.

3.2 Propriétés du module

Proposition 4
Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$. On a :
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z| = |-z| = |\overline{z}|$
- $|zz'| = |z|\,|z'|$ et si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

Proposition 5
Pour $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, on a :
$$|z+z'| \leq |z| + |z'|$$
Cette propriété s'appelle **inégalité triangulaire**.

Corollaire
Pour $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, on a : $\big|\,|z| - |z'|\,\big| \leq |z - z'|$

3.3 Propriétés de l'argument

Proposition 6
Soit $(z,z') \in (\mathbb{C}^*)^2$. On a :
- $(\arg(z) \equiv 0\ [\pi] \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*)$ et $\left(\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow z \text{ est un imaginaire pur}\right)$
- $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi]$
- $\arg(z \cdot z') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$ et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$

3.4 Notation exponentielle

Notation :
Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$$

Remarque 4
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'\ [2\pi]$

Proposition 7
Tout nombre complexe s'écrit sous la forme $z = \rho\, \mathrm{e}^{i\theta}$ où $\rho = |z|$ et θ est un argument de z.
Cette écriture s'appelle **forme trigonométrique** d'un nombre complexe.

Proposition 8
Pour tout réel θ, on a :
$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$$
Ces formules s'appellent **formules d'Euler**.

Proposition 9
Pour tout $(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2$, on a :
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}}$
- $\overline{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$
- $-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\pi)}$

Proposition 10
Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}$, on a $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^p = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\theta}$ ce qui donne :

$$(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^p = \cos(p\theta) + \mathrm{i}\sin(p\theta)$$

cette formule s'appelle la **formule de Moivre**

3.5 Exponentielle complexe

Définition 5
Pour tout nombre complexe z on note $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)}$

Proposition 11
Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ on a :
- $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^{z'}$
- $\dfrac{1}{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{-z}$
- $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \Leftrightarrow z - z' \in 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$

Proposition 12
Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, on a les factorisations suivantes dites **technique de l'angle moitié** :

$$1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}, \qquad 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = -2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+\theta'}{2}} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+\theta'}{2}}$$

4 Propriétés algébriques

4.1 Egalités dans $\mathbb{C}$

Proposition 13
Si z est un nombre complexe différent de 1, on a pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Proposition 14 Forumule du binôme dans $\mathbb{C}$
Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, et $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Applications :
- En appliquant la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$\cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx) = (\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x)\sin^k(x)\,\mathrm{i}^k$$

  Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\cos(nx) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(x)\sin^{2k}(x)$$

$$\sin(nx) = \sum_{0\leq 2k+1\leq n} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1}(x)\sin^{2k+1}(x)$$

On appelle cette technique le **développement** de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$.

- En appliquant les formules d'Euler et la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$\cos^n(x) = \left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{(2k-n)\mathrm{i}x}$$

$$\sin^n(x) = \left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)\right)^n = \frac{1}{(2\mathrm{i})^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\mathrm{e}^{(2k-n)\mathrm{i}x}$$

Dans chacune des sommes ci-dessus, les termes se regroupent pour donner, grâce aux formules d'Euler, une somme de cosinus ou de sinus.
On appelle cette technique la **linéarisation** des puissances de cosinus et sinus.

4.2 Fonctions polynômiales

Définition 6
Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application P définie sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ où pour tout $k \in [\![0, n]\!], a_k \in \mathbb{C}$ avec $a_n \neq 0$ est appelée **fonction polynômiale** de degré n.
Tout nombre complexe a qui vérifie $P(a) = 0$ est appelé **racine** de P.

Proposition 15
Soit P est une fonction polynômiale de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Si a est une racine de P alors il existe une fonction polynômiale Q de degré $n-1$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-a)Q(z)$.

Proposition 16
Soit $P : z \mapsto az^2 + bz + c$ une fonction polynômiale de degré 2, à coefficients complexes $(a, b, c \in \mathbb{C})$.
On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** de l'équation $P(x) = 0$, et $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

⇝ Si $\Delta \neq 0$, P admet deux racines : $\dfrac{-b \pm \delta}{2a}$
⇝ Si $\Delta = 0$, P admet une seule racine : $\dfrac{-b}{2a}$

Remarque 5
Si les coefficients de P sont réels, on retrouve les résultats connus lorsque $\Delta \geq 0$ et si $\Delta < 0$, P admet deux racines complexes conjuguées : $\dfrac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Remarque 6
Soit $a + \mathrm{i}b$ un nombre complexe (a, b réels). On a :

$$(x+\mathrm{i}y)^2 = a + \mathrm{i}b \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

Cela permet de déterminer LES racines carrées d'un nombre complexe.

Proposition 17
Soit $P : z \mapsto az^2 + bz + c$ une fonction polynômiale de degré 2. z_1 et z_2 sont les racines de P (distinctes ou non) si, et seulement si $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1\, z_2 = \dfrac{c}{a}$.

4.3 Racines n-ème de l'unité

Définition 7
On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Remarque 7
(1) $z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$
(2) $\mathbb{U}$ est l'ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique.

Théorème 1
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $z^n = 1$ admet n solutions complexes appelées **racines n-ème de l'unité**.
Leur ensemble est :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

Remarque 8
Les images des racines n-èmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

Proposition 18
Pour tout entier $n \geq 2$ la somme des n racines n-èmes de l'unité est nulle.

5 Interprétation géométrique des nombres complexes

5.1 Différence

Proposition 19
Soient A un point du plan d'affixe a et B un point d'affixe b.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$, et si $a \neq b$ et on a :

$$|b - a| = AB \quad \text{et} \quad \arg(b - a) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) \ [2\pi]$$

Proposition 20
Soit $(a, r) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^*$
- L'ensemble $\mathscr{C} = \{z \in \mathbb{C}, |z - a| = r\}$ est le cercle de centre A et de rayon r.
- L'ensemble $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z - a| \leq r\}$ est le disque fermé de centre A et de rayon r.

5.2 Quotient

Proposition 21
Soient A, B, C et D des points distincts d'affixes respectives a, b, c et d.

$$\left|\frac{d - c}{b - a}\right| = \frac{CD}{AB} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) \ [2\pi]$$

Proposition 22
Sous les mêmes hypothèses,

$$(AB)//(CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right) \equiv 0 \ [\pi]$$

$$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi]$$

Proposition 23
Soient A, B et C trois points distincts, d'affixes respectives a, b et c.
- Le triangle ABC est rectangle isocèle en A si, et seulement si

$$\frac{c-a}{b-a} = \pm \mathrm{i}$$

- Le triangle ABC est équilatéral si, et seulement si

$$\frac{c-a}{b-a} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

5.3 Applications du plan

Proposition 24
Soit $b \in \mathbb{C}$. L'application du plan qui au point d'affixe z associe le point d'affixe $z+b$ est la translation de vecteur d'affixe b.

Proposition 25
L'application du plan qui au point d'affixe z associe le point d'affixe $\overline{z}$ est la symétrie d'axe $(O, \vec{u})$.

Définition 8
Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. L'application du plan qui au point d'affixe z associe le point d'affixe az est une **homothétie** de centre O et de rapport a.

Proposition 26
M' est l'image de M par une homothétie de centre O et de rapport a si, et seulement si :

$$\overrightarrow{OM'} = a\,\overrightarrow{OM}$$

Définition 9
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. L'application du plan qui au point d'affixe z associe le point d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,z$ est une **rotation de centre O et d'angle θ**.

Proposition 27
M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ si, et seulement si :

$$OM' = OM \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \theta\ [2\pi]$$