CB n°10 - SURFACES - Sujet 1

Exercice 1 :

Déterminer une équation cartésienne du cylindre Σ de direction $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et de directrice Γ définie par :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = t \end{cases} .$$

On a donc :

$$M(x,y,z) \in \Sigma \Leftrightarrow \exists(\lambda,t) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \begin{cases} \cos t = x+\lambda \\ \sin t = y+\lambda \\ t = z \end{cases}$$

On élimine facilement t, ce qui donne :

$$\begin{cases} \cos z = x+\lambda \\ \sin z = y+\lambda \end{cases} .$$

Tout aussi facilement, on élimine λ, et on obtient enfin :

$$\cos z - \sin z = x - y.$$

Exercice 2

Déterminer une équation cartésienne du cône C de sommet $S(1,0,1)$ et de directrice $\Gamma : \left| \begin{array}{l} x = t \\ y = t^2 \\ z = t - t^2 \end{array} \right. , \quad t \in \mathbb{R}.$

On obtient tout d'abord une paramétrisation de C en remarquant que :

$$\begin{aligned} M \in C \quad & \Leftrightarrow \quad \exists N \in \Gamma,\ \exists \lambda \in \mathbb{R} \ / \ \overrightarrow{SM} = \lambda \overrightarrow{SN} \\ & \Leftrightarrow \quad \exists (t,\lambda) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \overrightarrow{0M} = \overrightarrow{OS} + \lambda \overrightarrow{SN(t)} \\ & \Leftrightarrow \quad \exists (t,\lambda) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \begin{cases} x(t,\lambda) = 1 + \lambda(t-1) \\ y(t,\lambda) = \lambda t^2 \\ z(t,\lambda) = 1 + \lambda(t - t^2 - 1) \end{cases} \end{aligned}$$

Il suffit ensuite d'éliminer les paramètres t et λ et on obtient :

$$z(t,\lambda) = 1 + \lambda(t-1) - \lambda t^2 \Leftrightarrow z = x - y.$$

Exercice 3

Soient la courbe $C : (x = t, y = t^2, z = t^3)$ et S la réunion des droites T_t : tangente à C en $M(t)$.

1. Déterminer un paramétrage de S.
2. Déterminer les points stationnaires de S et, pour les points réguliers, une équation du plan tangent à S.

1. On obtient :

$$S : (t,u) \mapsto \begin{cases} x(t,u) = t + u \\ y(t,u) = t^2 + 2ut \\ z(t,u) = t^3 + 3ut^2 \end{cases} , \quad (t,u) \in \mathbb{R}^2.$$

2. • Pour tout $(t,u) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\frac{\partial M}{\partial t}(t,u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2(t+u) \\ 3t(t+2u) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{u}}(\mathrm{t},\mathrm{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix},$$

donc la famille $\left(\frac{\partial M}{\partial t}(t,u), \frac{\partial M}{\partial u}(t,u)\right)$ est de rang $2 \Leftrightarrow u \neq 0$, c'est à dire que les points stationnaires sont les points $M(t,0)$ (i.e. les points de C).

- Soit $u \neq 0$. Le plan tangent à S en $M(t,u)$ admet pour équation :

$$\begin{vmatrix} x-(t+u) & 1 & 1 \\ y-(t^2+2ut) & 2(t+u) & 2t \\ z-(t^3+3ut^2) & 3t(t+2u) & 3t^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-t & 0 & 1 \\ y-t^2 & 2u & 2t \\ z-t^3 & 6tu & 3t^2 \end{vmatrix} = 0,$$

et, puisque $u \neq 0$, on a de manière équivalente :

$$\begin{vmatrix} x-t & 0 & 1 \\ y-t^2 & 1 & 2t \\ z-t^3 & 3t & 3t^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3t^2x + 3ty - z + t^3 = 0.$$

CB N°10 - SURFACES - SUJET 2

Exercice 1 :

Déterminer une équation cartésienne du cylindre Σ de direction $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et de directrice Γ définie par :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y=0 \end{array} \right. .$$

On a donc :

$$M(x,y,z) \in \Sigma \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \;/\; M + t\vec{u} \in \Gamma \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \;/\; \left\{ \begin{array}{l} (x+t)^2 + x^2 + (x+t)^2 = 1 \\ x+t+y=0 \end{array} \right.$$

On élimine facilement t et on obtient :

$$2y^2 + (x+y+z)^2 = 1.$$

Exercice 2

Déterminer une équation cartésienne du cône C de sommet $S(1,1,0)$ et de directrice la courbe Γ : $\left| \begin{array}{l} x^2+y^2-2x=0 \\ y=z \end{array} \right.$.

On a :

$$\begin{aligned}
M \in C \quad &\Leftrightarrow \quad \exists N(x_0,y_0,z_0) \in \Gamma,\ \exists \lambda \in \mathbb{R} \;/\; \overrightarrow{SM} = \lambda \overrightarrow{SN} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \;/\; \left\{ \begin{array}{l} x-1 = \lambda(x_0-1) \\ y-1 = \lambda(y_0-1) \\ z = \lambda z_0 \\ x_0^2+y_0^2-2x_0 = 0 \\ y_0 = z_0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \;/\; \left\{ \begin{array}{l} x-1 = \lambda(x_0-1) \\ y-1 = \lambda(y_0-1) \\ z = \lambda z_0 = \lambda y_0 = y-1+\lambda \\ (x_0-1)^2+y_0^2 = 1 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \;/\; \left\{ \begin{array}{l} x-1 = \lambda(x_0-1) \\ y-1 = \lambda(y_0-1) \\ z = \lambda y_0 \\ \lambda = z-y+1 \\ \lambda^2(x_0-1)^2+\lambda^2 y_0^2 = \lambda^2 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

En éliminant le paramètre, on obtient :

$$C : (x-1)^2 + z^2 = (z-y+1)^2$$

<u>Autre méthode :</u>
Commençons par déterminer une paramétrisation de Γ. On remarque que :

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1,$$

d'où l'on déduit :

$$\Gamma : \theta \mapsto \begin{cases} x(\theta) = 1 + \cos\theta \\ y(\theta) = \sin\theta \\ z(\theta) = \sin\theta \end{cases}, \ \theta \in [0, 2\pi].$$

On obtient ensuite une paramétrisation de C en remarquant que :

$$\begin{aligned} M \in C \quad &\Leftrightarrow \quad \exists N \in \Gamma,\ \exists \lambda \in \mathbb{R} \ / \ \overrightarrow{SM} = \lambda \overrightarrow{SN} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists(\theta, \lambda) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \ / \ \overrightarrow{0M} = \overrightarrow{OS} + \lambda \overrightarrow{SN(\theta)} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists(\theta, \lambda) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \ / \ \begin{cases} x(\theta, \lambda) = 1 + \lambda\cos\theta \\ y(\theta, \lambda) = 1 + \lambda(\sin\theta - 1) \\ z(\theta, \lambda) = \lambda\sin\theta \end{cases} \end{aligned}$$

Il suffit ensuite d'éliminer les paramètres θ et λ et on trouve :

$$\begin{cases} y = 1 + \lambda(\sin\theta - 1) = 1 + z - \lambda \\ (x-1)^2 + z^2 = \lambda^2 \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$C : (y - 1 - z)^2 = (x-1)^2 + z^2.$$

Exercice 3
Montrer que le point A de paramètres $(1, 1)$ de la surface $S : (x = u + v^2, y = u^2 + v, z = uv)$ est un point régulier et déterminer une équation cartésienne du plan tangent P à S en A.

- Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\frac{\partial M}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{v}}(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = \begin{pmatrix} 2v \\ 1 \\ u \end{pmatrix},$$

  ce qui nous donne :

$$\frac{\partial M}{\partial u}(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{v}}(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  donc la famille $\left(\frac{\partial M}{\partial t}(1, 1), \frac{\partial M}{\partial u}(1, 1)\right)$ est de rang 2, donc A est bien un point régulier de S.

- Le plan tangent à S en A admet pour équation :

$$P : \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ y-2 & 2 & 1 \\ z-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y & 2 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y - 3z - 1 = 0.$$