

CB N° 1 - INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES - SUJET 1

Dans tous les exercices, on notera f la fonction intégrée. Dans tous les cas, f est continue par morceaux sur l'intervalle I précisé, donc localement intégrable sur I .

1. Donner la nature des intégrales suivantes :

a. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \tan\left(\frac{1}{x}\right) dx \quad I = [1; +\infty[$, f est positive sur I (on a bien $\frac{1}{x} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ pour $x \in I$).

En $+\infty$: $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$, donc par comparaison à une intégrale de référence, $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge.

b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x} \quad I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, f est positive sur I .

En 0 : $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^2}$, donc par comparaison à une intégrale de référence, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ diverge.

c. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx \quad I =]0; +\infty[$, f est positive sur I .

En 0 : $x^{\frac{2}{3}} f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x) x^{\frac{1}{6}}$ donc, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{2}{3}} f(x) = 0$ et par suite, $f(x) = o_0\left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)$; par comparaison à une intégrale de référence, $\int_0^1 f(x) dx$ converge.

En $+\infty$: $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, donc par comparaison à une intégrale de référence, $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge.

En conclusion, $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge.

d. $\int_0^1 \frac{(-1)^{E(\frac{1}{x})}}{\sqrt{\sin x}} dx \quad I =]0; 1]$

En 0 : $|f(x)| \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$, donc par comparaison à une intégrale de référence, $\int_0^1 |f(x)| dx$ converge, donc $\int_0^1 f(x) dx$ converge.

2. Après en avoir justifié l'existence, calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}x} \quad I = [0; +\infty[, f \text{ positive sur } I.$

En $+\infty$: $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2e^{-x}$, donc par comparaison à une intégrale de référence, $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

On effectue le changement de variable $t = e^x$, et on obtient :

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{2}{1+t^2} dt = [2\operatorname{Arctan} t]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

b. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx \quad I = [1; +\infty[, f \text{ positive sur } I.$

En $+\infty$: Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} f(x) = 0$ donc $f(x) = o_{+\infty} \left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \right)$;
par comparaison à une intégrale de référence, $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.

On effectue une intégration par parties avec :

$u(x) = \ln x, v(x) = \frac{-1}{x}$, de classe C^1 , $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) = 0$ (par croissances comparées),

et on obtient : $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \left[\frac{-\ln x}{x} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{-1}{x} \right]_1^{+\infty} = 1.$

CB° 1 - INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES - SUJET 2

Dans tous les exercices, on notera f la fonction intégrée. Dans tous les cas, f est continue par morceaux sur l'intervalle I précisé, donc localement intégrable sur I .

1. Donner la nature des intégrales suivantes :

a. $\int_0^{+\infty} \sqrt{1 - \cos \frac{1}{x^2}} dx \quad I =]0; +\infty[, f \text{ est positive sur } I.$

En 0 : $0 \leq f(x) \leq \sqrt{2}$ donc, par domination, $\int_0^1 f(x) dx$ converge.

En $+\infty$: $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}x^2}$ donc, par comparaison à une intégrale de référence, $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge.

En conclusion, $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge.

b. $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx \quad I =]0; 1[, f \text{ est négative sur } I.$

En 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$, donc par prolongement par continuité, $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$ converge.

En 1 : $f(x) \underset{1}{\sim} \ln(1-x)$; la fonction \ln est intégrable en 0, donc, par changement de variable ($t = 1-x$) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(1-x) dx$ converge, et par comparaison, $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$ converge.

En conclusion, $\int_0^1 f(x) dx$ converge.

c. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(\tan x)^2} \quad I =]0; \frac{\pi}{4}], f \text{ est positive sur } I.$

En 0 : $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^2}$, donc par comparaison à une intégrale de référence, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ diverge.

d. $\int_1^{+\infty} (-1)^{E(x)} \sin \frac{1}{x^2} dx \quad I = [1; +\infty[$

En $+\infty$: $|f(x)| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$, par comparaison à une intégrale de référence, $\int_1^{+\infty} |f(x)| dx$ converge, donc $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge.

2. Après en avoir justifié l'existence, calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx \quad I =]0; +\infty[, f \text{ est positive sur } I.$

En 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ (croissances comparées) donc f se prolonge par continuité en 0 ;

$$\int_0^1 f(x) dx \text{ converge.}$$

En $+\infty$: $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$, donc par comparaison à une intégrale de référence, $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge.

En conclusion $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge.

En utilisant une primitive on a : $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \left[e^{-\frac{1}{x}} \right]_0^{+\infty} = 1.$

b. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx \quad I = [0; +\infty[, f \text{ positive sur } I.$

En $+\infty$: Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) = 0$, donc $f(x) = o_{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)$;

par comparaison à une intégrale de référence, $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge.

On effectue le changement de variable $t = \sqrt{x}$, on obtient : $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} 2te^{-t} dt$;

on effectue une intégration par parties, avec :

$u(t) = t, v(t) = -2e^{-t}$, de classe C^1 , $\lim_{t \rightarrow +\infty} (u(t)v(t)) = 0$ (par croissances comparées),

et on obtient : $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} 2te^{-t} dt = [-2te^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2e^{-t} dt = 2.$