# CB n°3 - SERIES NUMERIQUES - Sujet 1

**1.** Donner la nature des séries numériques suivantes :

**a.** $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(\sqrt{n}+2)^3}{(n+1)^2(\sqrt{n}+1)}$; $\displaystyle\frac{(\sqrt{n}+2)^3}{(n+1)^2(\sqrt{n}+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

par comparaison à une série positive divergente, la série diverge.

**b.** $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^2 \mathrm{e}^{-n}$; par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^4\mathrm{e}^{-n} = 0$ donc $\displaystyle n^2\mathrm{e}^{-n} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

par comparaison à une série positive convergente, la série converge.

**c.** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right)$ ; $\displaystyle n\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$

par comparaison à une série positive convergente, la série converge.

**d.** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1-2\sin n}{n^2}$; $\displaystyle\left|\frac{1-2\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{3}{n^2}$

par comparaison à une série convergente, la série converge absolument.

**e.** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n}$; $\displaystyle\frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n}$

par comparaison à une série positive divergente, la série diverge.

**f.** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\binom{2n}{n}$ ; on note $\displaystyle u_n = \frac{1}{n^2}\binom{2n}{n}$ ; $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 4$

le critère de d'Alembert donne la série divergente.

**g.** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^{\frac{1}{n^2}} - 1$; $\displaystyle n^{\frac{1}{n^2}} - 1 = \mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}\ln n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2}$

par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}\ln n}{n^2} = 0$ donc $\displaystyle\frac{\ln n}{n^2} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$

par comparaison à une série positive convergente, la série converge.

**2.** Déterminer la somme des séries suivantes :

**a.** $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\operatorname{ch} n}{4^n}$

$\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\mathrm{e}^n}{4^n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\mathrm{e}^{-n}}{4^n}$ sont deux séries géométriques convergentes. On a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} n}{4^n} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{4^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-n}}{4^n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{\mathrm{e}}{4}} + \frac{1}{1-\frac{\mathrm{e}^{-1}}{4}}\right) = \frac{2}{4-\mathrm{e}} + \frac{2}{4-\mathrm{e}^{-1}}$$

**b.** $\displaystyle\sum_{n\geq 2} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$

$\forall n \geq 2, (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = (-1)^n(\ln(n+1) - \ln(n)) - (-1)^{n-1}(\ln(n) - \ln(n-1))$

La série considérée est télescopique.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\ln(n+1) - \ln(n)) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0.$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \ln 2$

# CB N°3 - SERIES NUMERIQUES - SUJET 2.

**1.** Donner la nature des séries numériques suivantes :

**a.** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(\sqrt{n}+2)(n+1)}{\sqrt{n}(n^3-n+1)^{\frac{1}{2}}}$; $\displaystyle\frac{(\sqrt{n}+2)(n+1)}{\sqrt{n}(n^3-n+1)^{\frac{1}{2}}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$

par comparaison à une série positive divergente, la série diverge.

**b.** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$; par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{5}{4}}\ln n}{n^{\frac{3}{2}}} = 0$ donc $\displaystyle\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\right)$

par comparaison à une série positive convergente, la série converge.

**c.** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2\sin(n^2)-1}{n^3}$; $\displaystyle\left|\frac{2\sin(n^2)-1}{n^3}\right| \leq \frac{3}{n^3}$

par comparaison à une série convergente, la série converge absolument.

**d.** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}\cos\left(1-\frac{1}{n}\right)$; $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\cos 1}{\sqrt{n}}$

par comparaison à une série positive divergente, la série diverge.

**e.** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}$; $\displaystyle\frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

par comparaison à une série positive divergente, la série diverge.

**f.** $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^2\frac{n!}{(2n)!}$; on note $\displaystyle u_n = n^2\frac{n!}{(2n)!}$; $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$

le critère de d'Alembert donne la série convergente.

**g.** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$; $\displaystyle\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^2}{2^n}$

par comparaison à une série (géométrique) positive convergente, la série converge.

**2.** Déterminer la somme des séries suivantes :

**a.** $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\text{sh } n}{3^n}$

$\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\mathrm{e}^n}{3^n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\mathrm{e}^{-n}}{3^n}$ sont deux séries géométriques convergentes. On a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\text{sh } n}{3^n} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{3^n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-n}}{3^n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{\mathrm{e}}{3}} - \frac{1}{1-\frac{\mathrm{e}^{-1}}{3}}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3-\mathrm{e}} - \frac{1}{3-\mathrm{e}^{-1}}\right)$$

**b.** $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$\forall n \geq 2, \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = (\ln(n-1)-\ln(n)) - (\ln(n)-\ln(n+1))$

La série considérée est télescopique.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\ln(n+1)-\ln(n)) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0.$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2$