CB n°4 - ESPACES PREHILBERTIENS - Sujet 1

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$, la famille $\left(P_0 = X^0, P_1 = X, P_2 = X^2\right) \in E^3$ et le sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}\{P_0, P_1, P_2\}$.

On définit sur E^2 l'application suivante :

$$\varphi : (P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

- φ est bien une forme sur E puisque les fonctions polynômes sont continues sur $[0, 1]$.
- $\forall (P, Q) \in E^2$, $\varphi(P, Q) = \varphi(Q, P)$, donc φ est une forme symétrique.
- La linéarité de l'intégrale nous donne immédiatement : $\forall (P, Q, R) \in E^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi(P + \lambda Q, R) &= \int_0^1 (P + \lambda Q)(t)R(t)dt \\ &= \int_0^1 P(t)R(t)dt + \lambda \int_0^1 Q(t)R(t)dt \\ &= \varphi(P, R) + \lambda\varphi(Q, R), \end{aligned}$$

  d'où la linéarité de φ par rapport à la première variable, et par symétrie la bilinéarité de la forme φ.
- $\forall P \in E$, $\varphi(P, P) = \int_0^1 P^2(t)dt \geq 0$, donc la forme φ est positive.
- $\varphi(P, P) = 0 \Rightarrow \int_0^1 P^2(t)dt = 0 \Rightarrow P^2(t) = 0$, $\forall t \in [0, 1]$ car $t \mapsto P^2(t)$ est continue et positive sur [0,1] donc $P(t) = 0$ $\forall t \in [0, 1]$ donc P est un polynôme qui admet une infinité de racines, donc $P = 0$, donc φ est définie.

Conclusion : φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc un produit scalaire sur E.

2. Montrer que, pour tout polynôme $P \in E$, on a :

$$\left(\int_0^1 tP(t)dt\right)^2 \leqslant \frac{1}{3}\int_0^1 P^2(t)dt.$$

φ étant un produit scalaire, on peut utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui nous donne :

$$\forall (P, Q) \in E^2,\ |\varphi(P, Q)| \leq \sqrt{\varphi(P, P)}\sqrt{\varphi(Q, Q)},$$

donc en prenant $Q = X$, on trouve :

$$\left|\int_0^1 tP(t)dt\right| \leq \sqrt{\int_0^1 t^2dt \int_0^1 P^2(t)dt} \Leftrightarrow \left(\int_0^1 tP(t)dt\right)^2 \leqslant \frac{1}{3}\int_0^1 P^2(t)dt.$$

3. Déterminer une base orthonormale (Q_0, Q_1, Q_2) de F.
Base orthonormale (Q_0, Q_1, Q_2) sur F :

$$Q_0 = X^0\ ; \quad Q_1 = 2\sqrt{3}\left(X - \frac{X^0}{2}\right)\ ; \quad Q_2 = 6\sqrt{5}\left(X^2 - X + \frac{X^0}{6}\right).$$

4. Déterminer $p_F\left(X^3\right)$. $p_F\left(X^3\right) = \frac{1}{4}Q_0 + \frac{3\sqrt{3}}{20}Q_1 + \frac{\sqrt{5}}{20}Q_2 = \frac{3}{2}X^2 - \frac{3}{5}X + \frac{1}{20}X^0$.

CB N°4 - ESPACES PREHILBERTIENS - SUJET 2

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$, la famille $\left(P_0 = X^0, P_1 = X, P_2 = X^2\right) \in E^3$ et le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}\{P_0, P_1, P_2\}$.

On définit sur E^2 l'application suivante :

$$\varphi : (P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

- φ est bien une forme sur E puisque les fonctions polynômes sont continues sur $[0,1]$.
- $\forall (P,Q) \in E^2$, $\varphi(P,Q) = \varphi(Q,P)$, donc φ est une forme symétrique.
- La linéarité de l'intégrale nous donne immédiatement : $\forall (P,Q,R) \in E^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi(P+\lambda Q, R) &= \int_{-1}^{1} (P+\lambda Q)(t)R(t)dt \\ &= \int_{-1}^{1} P(t)R(t)dt + \lambda \int_{-1}^{1} Q(t)R(t)dt \\ &= \varphi(P,R) + \lambda\varphi(Q,R),\end{aligned}$$

  d'où la linéarité de φ par rapport à la première variable, et par symétrie la bilinéarité de la forme φ.
- $\forall P \in E$, $\varphi(P,P) = \int_{-1}^{1} P^2(t)dt \geq 0$, donc la forme φ est positive.
- $\varphi(P,P) = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} P^2(t)dt = 0 \Rightarrow P^2(t) = 0$, $\forall t \in [-1,1]$ car $t \mapsto P^2(t)$ est continue et positive sur [-1,1] donc $P(t) = 0$ $\forall t \in [-1,1]$ donc P est un polynôme qui admet une infinité de racines, donc $P = 0$, donc φ est définie.

Conclusion : φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc un produit scalaire sur E.

2. Montrer que, pour tout polynôme $P \in E$, on a :

$$\left(\int_{-1}^{1} tP(t)dt\right)^2 \leqslant \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} P^2(t)dt.$$

φ étant un produit scalaire, on peut utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui nous donne :

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ |\varphi(P,Q)| \leq \sqrt{\varphi(P,P)}\sqrt{\varphi(Q,Q)},$$

donc en prenant $Q = X$, on trouve :

$$\left|\int_{-1}^{1} tP(t)dt\right| \leq \sqrt{\int_{-1}^{1} t^2dt \int_{-1}^{1} P^2(t)dt} \Leftrightarrow \left(\int_{-1}^{1} tP(t)dt\right)^2 \leqslant \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} P^2(t)dt.$$

3. Déterminer une base orthonormale (Q_0, Q_1, Q_2) de F.
Base orthonormale (Q_0, Q_1, Q_2) sur F :

$$Q_0 = \frac{X^0}{\sqrt{2}}\ ;\quad Q_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}X\ ;\quad Q_2 = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(X^2 - \frac{X^0}{3}\right).$$

4. Déterminer $p_F\left(X^3 + X^4\right)$.
$P_F\left(X^3+X^4\right) = \frac{\sqrt{2}}{5}Q_0 + \frac{\sqrt{6}}{5}Q_1 + \frac{23\sqrt{5}}{70\sqrt{2}}Q_2 = \frac{69}{56}X^2 + \frac{3}{5}X - \frac{59}{280}X^0.$