CB N°5 - EQUATIONS DIFFERENTIELLES - SUJET 1

Exercice 1 : On étudie sur $I = \mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle suivante :

$$(L)\ :\ t^3y'' + ty' - y = 0.$$

1. Déterminer une solution polynômiale non nulle de (L).

La fonction $h = t \mapsto t$ est une solution particulière de (L).

2. En déduire l'ensemble des solutions de (L).

On pose le $y(t) = tf(t)$ et on parvient à l'équation :

$$t^2f'' + (2t+1)f' = 0.$$

On en déduit que $z = f'$ vérifie l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$t^2z' + (2t+1)z = 0.$$

On résout cette équation et on trouve $z(t) = K\dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}$, puis on intègre pour obtenir :

$$f(t) = Ae^{\frac{1}{t}} + B,\ \forall (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

La solution générale est donc :

$$y : t \mapsto (Ae^{\frac{1}{t}} + B)t,\ \forall (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 2 Résoudre, sur $I =]0,\pi[$, l'équation différentielle $(L)\ :\ y'' + y = \operatorname{cotan} t$ (on cherchera une solution particulière à l'aide de la méthode de la variation des constantes).

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont les solutions de l'équation homogène sont :

$$y_H = C_1\cos t + C_2 \sin t\ ,\quad \forall (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Par la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière de la forme :

$$f(t) = C_1(t)\cos t + C_2(t)\sin t,$$

avec C_1 et C_2 fonctions dérivables et la condition $C_1'\cos t + C_2'\sin t = 0$
Ainsi f est solution de (L) si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{l} C_1'\cos t + C_2'\sin t = 0 \\ -C_1'\sin t + C_2'\cos t = \operatorname{cotan} t \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1' = -\cos t \\ C_2' = \dfrac{\cos^2 t}{\sin t} \end{array}\right.$$

Il reste à intégrer. On trouve :

$$C_1(t) = -\int \cos t\, \mathrm{d}t = -\sin t + K_1,$$

et :

$$\begin{aligned}
C_2(t) &= \int \frac{\cos^2 t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t - \int \sin t\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{\sin t}{1-\cos^2 t}\,\mathrm{d}t + \cos t \underbrace{=}_{u=\cos t} \int \frac{-\mathrm{d}u}{1-u^2} + \cos t \\
&= \int \frac{-\mathrm{d}u}{2(1-u)} + \int \frac{-\mathrm{d}u}{2(1+u)} + \cos t = \frac{1}{2}\ln|1-u| - \frac{1}{2}\ln|1+u| + \cos t + K_2 \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos t}{1+\cos t} + \cos t + K_2
\end{aligned}$$

En prenant $K_1 = K_2 = 0$, on obtient donc finalement :

$$y_L(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\sin t + C_1\cos t + C_2 \sin t\,, \quad \forall (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

CB N°5 - EQUATIONS DIFFERENTIELLES - SUJET 2

Exercice 1 :
On étudie sur $I = \mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle suivante :

$$(L)\ :\ t^2y'' + ty' - y = 1.$$

1. Déterminer une solution polynômiale non nulle de l'équation homogène (H) associée à (L).

La fonction $h = t \mapsto t$ est une solution particulière de (L).

2. En déduire l'ensemble des solutions de (L).

On pose le $y(t) = tf(t)$ et on parvient à l'équation :

$$t^3f'' + 3t^2f' = 1.$$

On en déduit que $z = f'$ vérifie l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$t^3z' + 3t^2z = 1.$$

On résout cette équation et on trouve $z(t) = \dfrac{K}{t^3} + \dfrac{1}{t^2}$, puis on intègre pour obtenir :

$$f(t) = \frac{A}{t^2} + B - \frac{1}{t},\ \forall (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

La solution générale est donc :

$$y : t \mapsto \frac{A}{t} + Bt - 1,\ \forall (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 2
Résoudre, sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, l'équation différentielle $(L)\ :\ y'' + y = \tan^2 t$ (on cherchera une solution particulière à l'aide de la méthode de la variation des constantes).

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont les solutions de l'équation homogène sont :

$$y_H = C_1 \cos t + C_2 \sin t\ , \quad \forall (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Par la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière de la forme :

$$f(t) = C_1(t)\cos t + C_2(t)\sin t,$$

avec C_1 et C_2 fonctions dérivables, et la condition $C_1' \cos t + C_2' \sin t = 0$

.
Ainsi f est solution de (L) si et seulement si :

$$\begin{cases} C_1' \cos t + C_2' \sin t = 0 \\ -C_1' \sin t + C_2' \cos t = \tan^2 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = -\dfrac{\sin^3 t}{\cos^2 t} \\ C_2' = \dfrac{\sin^2 t}{\cos t} \end{cases}$$

Il reste à intégrer. On trouve :

$$C_1(t) = -\int \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{\sin t(1-\cos^2 t)}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t + \int \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{\cos t} - \cos t + K_1,$$

et :

$$\begin{aligned}
C_2(t) &= \int \frac{\sin^2 t}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1-\cos^2 t}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t - \int \cos t\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{\cos t}{1-\sin^2 t}\,\mathrm{d}t - \sin t \underbrace{=}_{u=\sin t} \int \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} - \sin t \\
&= \int \frac{\mathrm{d}u}{2(1-u)} + \int \frac{\mathrm{d}u}{2(1+u)} - \sin t = -\frac{1}{2}\ln|1-u| + \frac{1}{2}\ln|1+u| - \sin t + K_2 \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} - \sin t + K_2
\end{aligned}$$

En prenant $K_1 = K_2 = 0$, on obtient donc finalement :

$$y_L(x) = -2 + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\sin t + C_1\cos t + C_2\sin t\,, \quad \forall (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$