CB N°7 - FONCTIONS A PLUSIEURS VARIABLES - SUJET 1

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 \sin y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Elle l'est également en $(0,0)$ car :

$$\left| \frac{x^3 \sin y}{x^2+y^2} \right| \leqslant \frac{|x|^3 |y|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{\|(x,y)\|_2^4}{\|(x,y)\|_2^2} \leqslant \|(x,y)\|_2^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = f(0,0)$$

2. Déterminer, en tout point de $\mathbb{R}^2$ où elles existent, les dérivées partielles d'ordre un de f.

Dérivées partielles d'ordre un de f en $(0,0)$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Dérivées partielles d'ordre un de f en $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin y \left(\frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 \left(\frac{(x^2+y^2)\cos y - 2y \sin y}{(x^2+y^2)^2} \right).$$

3. La fonction f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

La fonction f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car elle ne l'est pas en $(0,0)$, d'après le théorème de Schwarz, car on trouve :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^5}{t^4} - 0}{t} = 1$$

Exercice 2

Etudier les extrema locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

1. La fonction f admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$, définies par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4(x-y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 4(x-y).$$

On en déduit que les points critiques sont définis par :

$$\left\{\begin{array}{l} x^3 - (x-y) = 0 \\ y^3 + (x-y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^3 + y^3 = 0 \\ y^3 + (x-y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -y \\ y(y^2-2) = 0 \end{array}\right. .$$

On en conclut qu'il y a trois points critiques :

$$O(0,0),\ A\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) \text{ et } B\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right).$$

2. la fonction f est de classe C^2 et on a :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 4, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4 \qquad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 4,$$

- Etude des points A et B :

$$H_f(A) = H_f(B) = M = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M) > 0,$$

de plus, $\operatorname{tr}(H_f(A)) > 0$; on en déduit que f admet un minimum local en A et en B qui vaut $m = f(A) = f(B) = -8$.

- Etude du point $O(0,0)$:

$$f(x,y) - f(0,0) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x,x) = 2x^4 \geqslant 0 \\ f(x,-x) = 2x^4 - 8x^2 \underset{x\to 0}{\sim} -8x^2 \leqslant 0 \end{array}\right. ,$$

donc $(0,0)$ est un point col.

CB N°7 - FONCTIONS A PLUSIEURS VARIABLES - SUJET 2

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y^3\sin x}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Elle l'est également en $(0,0)$ car :

$$\left|\frac{y^3\sin x}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{|y|^3|x|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{\|(x,y)\|_2^4}{\|(x,y)\|_2^2} \leqslant \|(x,y)\|_2^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = f(0,0)$$

2. Déterminer, en tout point de $\mathbb{R}^2$ où elles existent, les dérivées partielles d'ordre un de f.

Dérivées partielles d'ordre un de f en $(0,0)$:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$
$$\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Dérivées partielles d'ordre un de f en $(x,y)\neq(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^3\left(\frac{(x^2+y^2)\cos x - 2x\sin x}{(x^2+y^2)^2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin x\left(\frac{y^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right).$$

3. La fonction f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

La fonction f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car elle ne l'est pas en $(0,0)$, d'après le théorème de Schwarz, car on trouve :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^5}{t^4}-0}{t} = 1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0$$

Exercice 2

Etudier les extrema locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 6(x^2-y^2)^2$$

1. La fonction f admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$, définies par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 24x(x^2-y^2) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 + 24y(x^2-y^2).$$

On en déduit que les points critiques sont définis par :
$\begin{cases} 3x(x-8(x^2-y^2)) = 0 \\ 3y(y+8(x^2-y^2)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ ou } x-8(x^2-y^2)=0 \\ y=0 \text{ ou } y+8(x^2-y^2)=0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=0 \\ y(1-8y)=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x(1-8x)=0 \\ y=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-8(x^2-y^2)=0 \\ y+8(x^2-y^2)=0 \end{cases}$
On en conclut qu'il y a trois points critiques : $O(0,0)$, $A\left(0,\frac{1}{8}\right)$ et $B\left(\frac{1}{8},0\right)$ qui sont les points critiques de f.

2. La fonction f est de classe C^2, et on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x - 72x^2 + 24y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 48xy, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x,y) = 6y + 24x^2 - 72y^2.$$

- Etude des points A et B :

$$\det(H_f(A)) = \det(H_f(B)) = \frac{-9}{64} < 0,$$

  et on en déduit que A et B sont des points cols.
- Etude du point O :
  On a $f(x,x) - f(0,0) = 2x^3$ qui n'est pas de signe constant. $(0,0)$ est donc un point col.
  f n'admet pas d'extremum local.