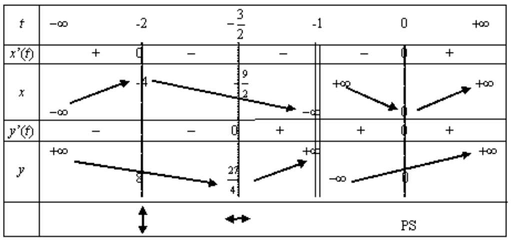
CB N°8 - COURBES PLANES - SUJET 1

Exercice 1

Etudier et tracer la courbe paramétrée d'équations : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{1+t} \\[2ex] y(t) = \dfrac{t^3}{1+t} \end{cases}$

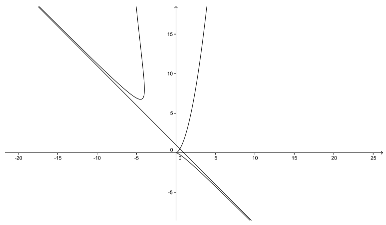
On a : $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{t(t+2)}{(1+t)^2} \\[2ex] y'(t) = \dfrac{t^2(3+2t)}{(1+t)^2} \end{cases}$



Etude des branches infinies :
En $\pm\infty$: $\lim\limits_{\pm\infty} \left|\dfrac{y}{x}\right| = +\infty$ donc il y a une branche parabolique de direction (Oy).
En -1 : $\lim\limits_{-1} \dfrac{y}{x} = -1, \lim\limits_{-1}(y+x) = 1$ donc il y a une asymptote d'équation $y = -x+1$.

Etude du point singulier (pour $t = 0$) :

$x(t) = t^2(1 - t + o(t)) = t^2 - t^3 + o(t^3)$
$y(t) = t^3(1 + o(1)) = t^3 + o(t^3)$
$\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour $p = 2$, et $\overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour $q = 3$.
On a un rebroussement de première espèce.



Exercice 2

Déterminer le rayon de courbure et une représentation paramétrique de la développée de la courbe paramétrée d'équations :

$$\begin{cases} x(t) = t - \tan(t) \\ y(t) = 1 - \ln(\cos(t)) \end{cases}, \text{où } t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

$\begin{cases} x'(t) = -\tan^2(t)) \\ y'(t) = \tan(t) \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x''(t) = -2\tan(t)(1+\tan^2(t)) \\ y''(t) = 1 + \tan^2(t) \end{cases}$

On trouve le rayon de courbure $R = |\tan(t)|\sqrt{1+\tan^2(t)} = \dfrac{|\tan(t)|}{\cos(t)}$

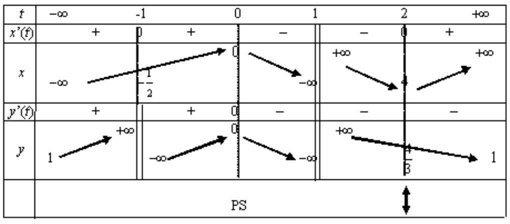
Puis une paramétrisation de la développée : $\begin{cases} X(t) = t - 2\tan(t) \\ Y(t) = 1 - \ln(\cos(t)) - \tan^2(t) \end{cases}$

CB N°8 - COURBES PLANES - SUJET 2

Exercice 1

Etudier et tracer la courbe paramétrée d'équations : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{t-1} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t^2-1} \end{cases}$

On a : $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{t(t-2)}{(t-1)^2} \\ y(t) = \dfrac{-2t}{(t^2-1)^2} \end{cases}$



Etude des branches infinies :

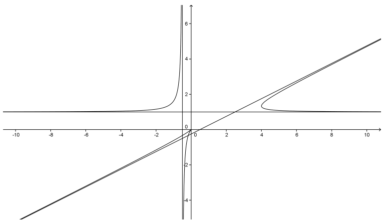
En $\pm\infty$: $\lim\limits_{\pm\infty} |x| = +\infty$ et $\lim\limits_{\pm\infty} y = 1$ donc il y a une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

En -1 : $\lim\limits_{-1} |y| = +\infty$ et $x(-1) = -\dfrac{1}{2}$ donc il y a une asymptote verticale d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$.

En 1 : $\lim\limits_{1} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{1} \dfrac{1}{t+1} = \dfrac{1}{2}, \lim\limits_{1}(y - \dfrac{1}{2}x) = -\dfrac{1}{4}$ donc il y a une asymptote d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$.

Etude du point singulier (pour $t = 0$) :

$x(t) = -t^2(1 + t + o(t)) = -t^2 - t^3 + o(t^3)$
$y(t) = -t^2(1 + o(t)) = -t^2 + o(t^3)$
$\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour $p = 2$, et $\overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour $q = 3$. On a un rebroussement de première espèce.



Exercice 2

Déterminer le rayon de courbure et une représentation paramétrique de la développée de la courbe paramétrée d'équations :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = \ln(t) \end{cases}, \text{où } t \in \mathbb{R}_+^*.$$

On a : $\begin{cases} x'(t) = 2t \\ y'(t) = \dfrac{1}{t} \end{cases}$ $\begin{cases} x''(t) = 2 \\ y''(t) = \dfrac{-1}{t^2} \end{cases}$

On trouve le rayon de courbure $R = -\dfrac{(1+4t^4)^{\frac{3}{2}}}{4t^2}$

Puis une paramétrisation de la développée : $\begin{cases} X(t) = 2t^2 + \dfrac{1}{4t^2} \\ Y(t) = \ln(t) - 2t^4 - \dfrac{1}{2} \end{cases}$