

CB N°9 - PROBABILITES - SUJET 1**Exercice 1**

Soient X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ et Y une variable aléatoire indépendante de X suivant une loi de Bernoulli de paramètre p .

On définit la variable aléatoire Z par $Z = 0$ si $Y = 0$, et $Z = X$ sinon.

- Déterminer la loi de Z .

Z est à valeurs dans \mathbb{N} .

La formule des probabilités totales donne :

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}_{(Y=0)}(Z = 0) \times \mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}_{(Y=1)}(Z = 0) \times \mathbb{P}(Y = 1) = 1 - p + pe^{-\lambda}.$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}((Y = 1) \cap (X = k)) = pe^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

- Montrer que Z admet une espérance finie et une variance et les calculer.

$\sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k!}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!}$ sont des séries convergentes (on peut appliquer le critère de d'Alembert pour les séries numériques), donc Z admet une espérance finie et une variance.

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^{+\infty} kpe^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = pe^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = pe^{-\lambda} \times \lambda e^\lambda = p\lambda.$$

$$\mathbb{E}(Z^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 pe^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = pe^{-\lambda} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k-1)\lambda^k}{k!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\lambda^k}{k!} \right) \text{ (car les deux séries convergent),}$$

d'où :

$$\mathbb{E}(Z^2) = pe^{-\lambda}(\lambda^2 e^\lambda + \lambda e^\lambda) = p\lambda(\lambda + 1).$$

$$\text{Finalement, } V(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - (\mathbb{E}(Z))^2 = p\lambda(\lambda + 1 - p\lambda)$$

Exercice 2

Dans une salle d'attente, votre voisin est joueur.

- S'il parie que le nombre de personnes entrant avant la première femme est pair, prenez-vous le pari ?

Notons N la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes entrées avant la première femme, et p la probabilité qu'une personne entrant dans la salle d'attente soit une femme.

$N(\Omega) = \mathbb{N}$, et la formule des probabilités composées donne $\forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(N = k) = (1-p)^k p$.

On veut : $\mathbb{P}(N \text{ pair}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} (N = 2k)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = 2k)$ car l'union est disjointe.

$$\mathbb{P}(N \text{ pair}) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(1-p)^{2k} = \frac{p}{1 - (1-p)^2} = \frac{1}{2-p} > \frac{1}{2}.$$

Il ne faut donc pas parier, quelle que soit la probabilité d'entrée d'une femme !

- On suppose que le nombre d'arrivants par heure suit une loi de Poisson. S'il parie que le nombre de personnes entrant dans la salle durant la prochaine heure est impair, prenez-vous le pari ?

Notons cette fois N le nombre de personnes entrant dans la salle d'attente durant une heure.

On suppose que $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

$$\mathbb{P}(N \text{ impair}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = 2k + 1) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^{-\lambda} \text{sh}(\lambda) = \frac{1 - e^{-2\lambda}}{2} < \frac{1}{2}.$$

Cette fois, il faut parier !

Exercice 3

On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6.

Quelle est la probabilité que tous les chiffres obtenus soient pairs (6 y compris) ?

Notons A l'événement dont on veut la probabilité, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, A_n l'événement " les $n - 1$ premiers lancers donnent 2 ou 4, le n -ième donne 6. $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$, car l'union est disjointe.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la formule des probabilités composées donne : $\mathbb{P}(A_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3^n}$;

on en déduit : $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$.

CB N°9 - PROBABILITES - SUJET 2
Exercice 1

Soient X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p et Y une variable aléatoire indépendante de X suivant une loi de Bernoulli de même paramètre p .

On définit la variable aléatoire Z par $Z = 0$ si $Y = 0$, et $Z = X$ sinon.

- Déterminer la loi de Z .

Z est à valeurs dans \mathbb{N} .

La seule façon d'obtenir $Z = 0$, est d'avoir $Y = 0$, on a donc : $\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(Y = 0) = 1 - p$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}((Y = 1) \cap (X = k)) = p^2(1 - p)^{k-1}$.

- Montrer que Z admet une espérance finie et une variance et les calculer.

$\sum_{k=1}^{+\infty} k(1 - p)^{k-1}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2(1 - p)^{k-1}$ sont des séries convergentes (on peut appliquer le critère de d'Alembert pour les séries numériques, sachant que $p \in]0, 1[$), donc Z admet une espérance finie et une variance.

$\mathbb{E}(Z) = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k(1 - p)^{k-1}$. On reconnaît la dérivée du DSE de $x \mapsto \frac{1}{1 - x}$; on a donc :

$$\mathbb{E}(Z) = p^2 \times \frac{1}{(1 - (1 - p))^2} = 1.$$

$$\mathbb{E}(Z^2) = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k^2(1 - p)^{k-1} = p^2 \left((1 - p) \sum_{k=2}^{+\infty} k(k - 1)(1 - p)^{k-2} + \sum_{k=1}^{+\infty} k(1 - p)^{k-1} \right) \text{ (car les}$$

deux séries convergent) ; on reconnaît dans la première la dérivée seconde de $x \mapsto \frac{1}{1 - x}$ d'où :

$$\mathbb{E}(Z^2) = p^2(1 - p) \frac{2}{(1 - (1 - p))^3} + 1 = \frac{2 - p}{p}.$$

$$\text{Finalement, } V(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - (\mathbb{E}(Z))^2 = \frac{2 - 2p}{p}.$$

Exercice 2

Dans une salle d'attente, votre voisin est joueur.

- S'il parie que le nombre de personnes entrant avant le premier homme est impair, prenez-vous le pari ?

Notons N la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes entrées avant le premier homme, et p la probabilité qu'une personne entrant dans la salle d'attente soit un homme.

$N(\Omega) = \mathbb{N}$, et la formule des probabilités composées donne $\forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(N = k) = (1 - p)^k p$.

On veut $\mathbb{P}(N \text{ impair}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} (N = 2k + 1)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = 2k + 1)$ car l'union est disjointe.

$$\mathbb{P}(N \text{ impair}) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(1-p)^{2k+1} = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p} = 1 - \frac{1}{2-p} < \frac{1}{2}.$$

Il faut donc parier, quelle que soit la probabilité d'entrée d'un homme!

2. On suppose que le nombre d'arrivants par heure suit une loi de Poisson. S'il parie que le nombre de personnes entrant dans la salle durant la prochaine heure est pair, prenez-vous le pari?

Notons cette fois N le nombre de personnes entrant dans la salle d'attente durant une heure. On suppose que $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$. On veut $\mathbb{P}(N \text{ pair})$.

$$\mathbb{P}(N \text{ pair}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = 2k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = e^{-\lambda} \text{ch}(\lambda) = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2} > \frac{1}{2}.$$

Cette fois, il ne faut pas parier!

Exercice 3

On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6.

Quelle est la probabilité que tous les chiffres obtenus avant soient impairs?

Notons A l'événement dont on veut la probabilité, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, A_n l'événement " les $n - 1$ premiers lancers donnent 1, 3 ou 5, le n -ième donne 6. $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$, car l'union est disjointe.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la formule des probabilités composées donne : $\mathbb{P}(A_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^n}$;

on en déduit : $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$.