CB n°10 - PROBABILITES - Sujet 1

EXERCICE 1

On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6.
Quelle est la probabilité que tous les chiffres obtenus soient pairs ?
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note :
◊ P_k : "Obtenir 2 ou 4 lors du k-ème lancer" ;
◊ S_k : "Obtenir 6 au k-ème lancer" ;
◊ A_k : "Obtenir 2 ou 4 jusqu'au k-ème lancer et 6 au $k+1$-ème" ;
◊ A : "Tous les chiffres obtenus sont pairs".

On a : $A_k = \left(\bigcap_{i=1}^{k} P_i\right) \cap S_{k+1}$. La formule des probabilités composées donne : $\mathbb{P}(A_k) = \left(\frac{2}{6}\right)^k \frac{1}{6}$.

De plus, $A = S_1 \cup \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right)$, et cette union est disjointe. Par σ-additivité, on a :

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(S_1) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$.

EXERCICE 2

Un concierge dispose de n clés. Pour ouvrir une porte, il les essaie une à une, sans jamais essayer la même, jusqu'à obtenir la bonne.
Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k l'événement : "la porte s'ouvre au k-ème essai".
En remarquant que, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(A_k \cap \overline{A_{k-1}} \cap \cdots \cap \overline{A_1})$, déterminer $\mathbb{P}(A_k)$ à l'aide de la formule des probabilités composées, que l'on énoncera clairement.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. D'après la formule des probabilités composées, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_k) &= \mathbb{P}(A_k \cap \overline{A_{k-1}} \cap \cdots \cap \overline{A_1}) \\
&= \mathbb{P}(\overline{A_1})\, \mathbb{P}(\overline{A_2} | \overline{A_1})\, \mathbb{P}(\overline{A_3} | \overline{A_2} \cap \overline{A_1}) \cdots \mathbb{P}(\overline{A_{k-1}} | \overline{A_{k-2}} \cap \cdots \cap \overline{A_1})\, \mathbb{P}(A_k | \overline{A_{k-1}} \cap \cdots \cap \overline{A_1}) \\
&= \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{n-(k-1)}{n-(k-2)} \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

EXERCICE 3

Une boîte A contient deux jetons portant le numéro 0, et une boîte B contient deux jetons portant le numéro 1.
On tire au hasard un jeton dans chaque boîte et on les échange. On recommence cette opération n fois.
On s'intéresse à la somme des numéros des jetons contenus dans la boîte A après n tirages.
On introduit les événements :
A_n : "la somme des numéros des jetons de la boîte A après n tirages est 0".
B_n : "la somme des numéros des jetons de la boîte A après n tirages est 1".
C_n : "la somme des numéros des jetons de la boîte A après n tirages est 2".
On note $a_n = \mathbb{P}(A_n), b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$.

1. Déterminer a_0, b_0, c_0, a_1, b_1 et c_1.
$a_0 = 1; b_0 = 0; c_0 = 0; a_1 = 0; b_1 = 1, c_1 = 0$.

2. Exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n, à l'aide de la formule des probabilités totales, que l'on énoncera clairement.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille $\{A_n, B_n, C_n\}$ forme une partition de l'univers.
La formule des probabilités totales donne :

- $\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|C_n)\mathbb{P}(C_n)$ donc
  $a_{n+1} = a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{4} + c_n \times 0 = \frac{1}{4} b_n$

- $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}|C_n)\mathbb{P}(C_n)$ donc
  $b_{n+1} = a_n \times 1 + b_n \times \dfrac{1}{2} + c_n \times 1$
- $\mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}(C_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(C_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_{n+1}|C_n)\mathbb{P}(C_n)$ donc
  $c_{n+1} = a_n \times 0 + b_n \times \dfrac{1}{4} + c_n \times 0 = \dfrac{1}{4}b_n$

3. Vérifier que $b_{n+2} = \dfrac{1}{2}b_{n+1} + \dfrac{1}{2}b_n$.
En déduire les valeurs de b_n puis de a_n et c_n, ainsi que leurs limites quand n tend vers $+\infty$.
D'après la question précédente, on a :
$b_{n+2} = a_{n+1} + \dfrac{1}{2}b_{n+1} + c_{n+1} = \dfrac{1}{4}b_n + \dfrac{1}{2}b_{n+1} + \dfrac{1}{4}b_n = \dfrac{1}{2}b_{n+1} + \dfrac{1}{2}b_n$.
$(b_n)_n$ est une suite linéaire récurrente d'ordre 2, d'équation caractéristique $2r^2 - r - 1 = 0$.
Avec les valeurs de b_0 et b_1, on obtient pour $n \in \mathbb{N}$: $b_n = \dfrac{2}{3}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$.
Par suite, on obtient : $a_0 = 1, c_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*, a_n = c_n = \dfrac{1}{6}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$
Enfin, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \dfrac{1}{6}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{2}{3}$.

EXERCICE 4
La probabilité qu'une personne soit allergique au vaccin Pfizer est de 10^{-3}. On s'intéresse à un échantillon de 1000 de personnes. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombres de personnes allergiques dans l'échantillon.

1. Déterminer la loi de X (en justifiant).
Si on considère comme "succès" d'être allergique, X compte le nombre de succès dans une échantillon de 1000 personnes, la probabilité du succès étant de 10^{-3}.
X suit donc une loi binomiale de paramètres $(1000, 10^{-3})$.

2. En utilisant une approximation que l'on justifiera, calculer la probabilité qu'au moins 2 personnes soient allergiques dans l'échantillon.
On peut ici utiliser une approximation de loi binomiale par une loi de Poisson de paramètre
$\lambda = 1000 \times 10^{-3} = 1$. On a alors $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$.
Ainsi, $\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - 2\mathrm{e}^{-1} \simeq 0,264$.

EXERCICE 5
La police contrôle la circulation en période de confinement suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque individu a une probabilité p de ne pas être en règle avec la réglementation, indépendamment des autres personnes.
Déterminer la loi de la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes reconnues en infraction.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de contrôles effectués.
D'après l'énoncé, $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.
On note N la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes reconnues en infraction.
On a $N(\Omega) = \mathbb{N}$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(N = n) = \mathbb{P}((N = n) \cap (X \geq n)) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty}((N = n) \cap (X = k)\right) \underset{\sigma-\text{additivité}}{=} \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}\left((N = n) \cap (X = k)\right)$$

$$= \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n | X = k)\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^n}{n!} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{k-n}}{(k-n)!}$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^n}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^k}{(k)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^n}{n!}\mathrm{e}^{\lambda(1-p)} = \mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^n}{n!}.$$

N suit une loi de Poisson de paramètre λp.

CB N°10 - PROBABILITES - SUJET 2

EXERCICE 1

On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 1.
Quelle est la probabilité que tous les chiffres obtenus soient impairs ?
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note :
◊ I_k : "Obtenir 3 ou 5 lors du k-ème lancer" ;
◊ U_k : "Obtenir 1 au k-ème lancer" ;
◊ A_k : "Obtenir 3 ou 5 jusqu'au k-ème lancer et 1 au $k+1$-ème" ;
◊ A : "Tous les chiffres obtenus sont impairs".

On a : $A_k = \left(\bigcap_{i=1}^{k} I_i\right) \cap U_{k+1}$. La formule des probabilités composées donne : $\mathbb{P}(A_k) = \left(\dfrac{2}{6}\right)^k \dfrac{1}{6}$.

De plus, $A = U_1 \cup \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right)$, et cette union est disjointe. Par σ-additivité, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(U_1) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$$

EXERCICE 2

Une urne contient n boules rouges, et n boules blanches numérotées. On tire les boules 2 par 2 (simultanément) jusqu'à vider l'urne.
Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k l'événement : "on obtient une boule de chaque couleur au k-ème tirage".

1. Expliciter $\mathbb{P}(A_1)$, et pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathbb{P}(A_{k+1} | A_1 \cap \cdots \cap A_k)$

On a : $\mathbb{P}(A_1) = \dfrac{\binom{n}{1}\binom{n}{1}}{\binom{2n}{2}} = \dfrac{2\,n^2}{2n(2n-1)}$.

Le conditionnement signifie que jusqu'au k-ème tirage on a enlevé autant de boules rouges que de boules blanches. Lors du $k+1$-ème tirage, il reste donc $(n-k)$ boules de chaque couleur.

On en déduit que : $\mathbb{P}(A_{k+1}|A_1 \cap \cdots \cap A_k) = \dfrac{\binom{n-k}{1}\binom{n-k}{1}}{\binom{2n-2k}{2}} = \dfrac{(n-k)^2}{\binom{2n-2k}{2}} = \dfrac{2(n-k)^2}{(2n-2k)(2n-2k-1)}$.

2. A l'aide de la formule des probabilités composées, que l'on énoncera clairement, déterminer la probabilité que l'on tire une boule de chaque couleur à chaque tirage.

On note A : "on tire une boule de chaque couleur à chaque tirage". On a : $A = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$.

La formule des probabilités composées donne :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2|A_1)\cdots\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$$

EXERCICE 3

Une urne A contient deux boules rouges et une urne B contient deux boules noires.
On tire au hasard une boule dans chaque urne et on les échange. On recommence cette opération n fois.
On s'intéresse à la couleur des boules contenues dans la boîte A après n tirages.
On introduit les événements :
A_n : "Après n tirages, les deux boules de l'urne A sont rouges".
B_n : "Après n tirages, les deux boules de l'urne A sont noires".

C_n : "Après n tirages, l'urne A contient une boule de chaque couleur".
On note $a_n = \mathbb{P}(A_n), b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$.

1. Déterminer a_0, b_0, c_0, a_1, b_1 et c_1.
$a_0 = 1; b_0 = 0; c_0 = 0; a_1 = 0; b_1 = 0, c_1 = 1$.

2. Exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n, à l'aide de la formule des probabilités totale, que l'on énoncera clairement.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille $\{A_n, B_n, C_n\}$ forme une partition de l'univers.
La formule des probabilités totales donne :
- $\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|C_n)\mathbb{P}(C_n)$ donc
$a_{n+1} = a_n \times 0 + b_n \times 0 + c_n \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}c_n$
- $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}|C_n)\mathbb{P}(C_n)$ donc
$b_{n+1} = a_n \times 0 + b_n \times 0 + c_n \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}c_n$
- $\mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}(C_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(C_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_{n+1}|C_n)\mathbb{P}(C_n)$ donc
$c_{n+1} = a_n \times 1 + b_n \times 1 + c_n \times \frac{1}{2}$

3. Vérifier que $c_{n+2} = \frac{1}{2}c_{n+1} + \frac{1}{2}c_n$.
En déduire les valeurs de c_n puis de a_n et b_n, ainsi que leurs limites quand n tend vers $+\infty$.
D'après la question précédente, on a :
$c_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} + \frac{1}{2}c_{n+1} = \frac{1}{4}c_n + \frac{1}{4}c_n + \frac{1}{2}c_{n+1} = \frac{1}{2}c_{n+1} + \frac{1}{2}c_n$.
$(c_n)_n$ est une suite linéaire récurrente d'ordre 2, d'équation caractéristique $2r^2 - r - 1 = 0$.
Avec les valeurs de c_0 et c_1, on obtient pour $n \in \mathbb{N}$: $c_n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$.
Par suite, on obtient : $a_0 = 1, b_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*, a_n = b_n = \frac{1}{6}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$
Enfin, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{6}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \frac{2}{3}$.

EXERCICE 4
La probabilité qu'une personne soit allergique au vaccin Astra Zeneca est de $2 \cdot 10^{-3}$. On s'intéresse à un échantillon de 1000 de personnes. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombres de personnes allergiques dans l'échantillon.

1. Déterminer la loi de X (en justifiant).
Si on considère comme "succès" d'être allergique, X compte le nombre de succès dans une échantillon de 1000 personnes, la probabilité du succès étant de $2 \cdot 10^{-3}$.
X suit donc une loi binomiale de paramètres $(1000, 10^{-3})$.

2. En utilisant une approximation que l'on justifiera, calculer la probabilité qu'au moins 2 personnes soient allergiques dans l'échantillon.
On peut ici utiliser une approximation de loi binomiale par une loi de Poisson de paramètre
$\lambda = 1000 \times 2 \cdot 10^{-3} = 2$. On a alors $\mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-2}\frac{2^k}{k!}$.
Ainsi, $\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - 3\mathrm{e}^{-2} \simeq 0,593$.

EXERCICE 5
La police contrôle la circulation en période de confinement suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque individu a une probabilité p de ne pas être en règle avec la réglementation, indépendamment des autres personnes.
Déterminer la loi de la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes reconnues en infraction.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de contrôles effectués.
D'après l'énoncé, $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.
On note N la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes reconnues en infraction.
On a $N(\Omega) = \mathbb{N}$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(N=n) = \mathbb{P}((N=n) \cap (X \geq n)) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty}((N=n) \cap (X=k)\right) \underset{\sigma-\text{additivité}}{=} \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}\left((N=n) \cap (X=k)\right)$$

$$= \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n|X=k)\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^n}{n!} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{k-n}}{(k-n)!}$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^n}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^k}{(k)!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^n}{n!} \mathrm{e}^{\lambda(1-p)} = \mathrm{e}^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^n}{n!}.$$

N suit une loi de Poisson de paramètre λp.