CB N°11 - SURFACES - SUJET 1

Dans tout le sujet, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

EXERCICE 1

Soient C la courbe admettant pour paramétrage : $t \mapsto \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$, et S la surface réglée engendrée par les droites T_t tangentes à C en $M(t)$.

1. Déterminer un paramétrage de S.

La tangent à C en $M(t)$ est dirigée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$ d'où le paramétrage ψ de S : $(t,u) \mapsto \begin{cases} x(t,u) = t+u \\ y(t,u) = t^2 + 2tu \\ z(t,u) = t^3 + 3t^2 u \end{cases}$

2. Déterminer les points singuliers de S et, pour les points réguliers, donner une équation cartésienne du plan tangent à S.

Pour $(t,u) \in \mathbb{R}^2$, on a : $\dfrac{\partial \psi}{\partial t}(t,u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2(t+u) \\ 3t(t+2u) \end{pmatrix}$ et $\dfrac{\partial \psi}{\partial u}(t,u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$.
La famille $\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial t}(t,u), \dfrac{\partial \psi}{\partial u}(t,u) \right)$ est libre si, et seulement si $u \neq 0$, donc les points stationnaires sont les points $M(t,0)$, c'est-à-dire les points de C.
Pour $u \neq 0$, le plan tangent à S en $M(t,u)$ admet pour équation :
$\begin{vmatrix} x-(t+u) & 1 & 1 \\ y-(t^2+2tu) & 2(t+u) & 2t \\ z-(t^3+3t^2u) & 3t(t+2u) & 3t^2 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} x-t & 0 & 1 \\ y-t^2 & 2u & 2t \\ z-t^3 & 6tu & 3t^2 \end{vmatrix} = 0$ et comme $u \neq 0$ on obtient :

$$-3t^2 x + 3ty - z + t^3 = 0$$

3. Vérifier que tous les points réguliers d'une même génératrice T_t ont le même plan tangent.

L'équation du plan tangent à S en $M(t,u)$ ne dépend pas de u ; on a donc bien le même plan tangent pour tous les points réguliers d'une même génératrice.

EXERCICE 2

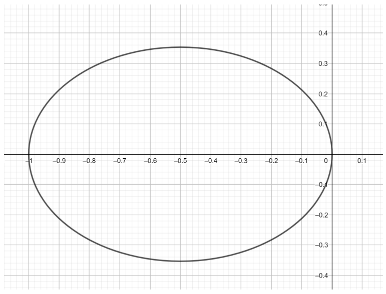
Soit C la courbe d'équations : $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x^2 + 2z^2 - y - 1 = 0 \end{cases}$.

1. Déterminer la projection de C sur le plan (yOz), et la représenter.

On note C_x la projection de C sur le plan (yOz). On a :
$M(0,y,z) \in C_x \Leftrightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_0 - y = 1 \\ x_0^2 + 2z^2 - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_0 = x - 1 \\ (y+1)^2 + 2z^2 - y - 1 = 0 \end{cases}$.

On en déduit que C_x a pour équations : $\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ \left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2+2z^2=\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$.

On reconnait une ellipse de centre $\Omega\left(0,-\dfrac{1}{2},0\right)$.



2. Donner une équation cartésienne du cylindre Σ de directrice C dont les génératrices sont parallèles à la droite d'équations $\left\{\begin{array}{l} x-2y-3=0 \\ x-y-z-2=0 \end{array}\right.$.

La droite D d'équations $\left\{\begin{array}{l} x-2y-3=0 \\ x-y-z-2=0 \end{array}\right.$ est dirigée par $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$. On a :

$M(x,y,z)\in\Sigma \Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}, M+t\overrightarrow{u}\in C \Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}, \left\{\begin{array}{l} (x+2t)-(y+t)=1 \\ (x+2t)^2+2(z+t)^2-(y+t)-1=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}, \left\{\begin{array}{l} t=-x+y+1 \\ (x+2(-x+y+1))^2+2(z+(-x+y+1))^2-(y+(-x+y+1))=1 \end{array}\right.$.

On obtient ainsi l'équation cartésienne de Σ :

$$3x^2+6y^2+2z^2-8xy-4xz+4yz-7x+10y+4z+4=0$$

3. Donner une équation cartésienne de la surface de révolution S engendrée par la rotation de C autour de la droite (Oy).

$$\begin{aligned}
M(x,y,z)\in S \quad &\Leftrightarrow \quad \exists M(x_0,y_0,z_0)\in C, \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{MM_0}\cdot\overrightarrow{j}=\overrightarrow{0} \\ OM_0=OM \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \exists (x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3, \left\{\begin{array}{l} x_0-y_0=1 \\ x_0^2+2z_0^2-y_0-1=0 \\ y_0=y \\ x^2+y^2+z^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \exists (x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3, \left\{\begin{array}{l} y_0=y \\ x_0=1+y \\ z_0^2=\dfrac{1}{2}\left(1+y-(1+y)^2\right) \\ x^2+y^2+z^2=(1+y)^2+y^2+\dfrac{1}{2}\left(1+y-(1+y)^2\right) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Il faut $1+y-(1+y)^2\geq 0$, donc $y\in[-1,0]$; on en déduit une équation cartésienne de S :

$$2x^2-y^2+2z^2-3y-2=0 \qquad \text{avec} \quad y\in[-1,0]$$

EXERCICE 3

Soit S la surface d'équation : $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$.

1. Donner une équation du plan tangent tangent à S en $A(1, 0, 0)$.

On note $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 1$.
On a $\overrightarrow{\text{Grad}} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3yz \\ 3y^2 - 3xz \\ 3z^2 - 3xy \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\text{Grad}} f(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
On en déduit l'équation du plan tangent à S en A : $x = 1$.

2. On pose $s = x + y + z$ et $t = x^2 + y^2 + z^2$. Montrer que l'équation de S s'écrit : $3st - s^3 = 2$.

$3st - s^3 = 3(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^3 = 2(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = 2$

3. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe, dont le premier vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.
A l'aide de la question précédente, donner une équation de S dans le repère $(O, \mathscr{B})$.

Si on note (x, y, z) les coordonnées d'un point M dans le repère initial et (x_1, y_1, z_1) ses coordonnées dans $(O, \mathscr{B})$, on a : $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y + z)$ et $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x^2 + y^2 + z^2$, donc l'équation de S dans $(O, \mathscr{B})$ devient : $3\sqrt{3}x_1(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - 3\sqrt{3}x_1^3 = 2$, soit encore :

$$3\sqrt{3}x_1(y_1^2 + z_1^2) = 2$$

4. En déduire que S est une surface de révolution autour de la droite $D = (O, \overrightarrow{u})$.

Les intersections de S avec les plans d'équations $x_1 = k$ sont des cercles de centre sur l'axe $(O, \overrightarrow{u})$.
On en déduit que S est une surface de révolution autour de la droite $D = (O, \overrightarrow{u})$.

CB N°11 - SURFACES - SUJET 2

Dans tout le sujet, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

EXERCICE 1

Soit S la surface admettant pour paramétrage : $(u,v) \mapsto \begin{cases} x = u + v^2 \\ y = v + u^2 \\ z = uv \end{cases}$

1. Montrer que le point A de S de paramètres $(1,1)$ est un point régulier, et déterminer une équation cartésienne du plan P tangent à S en A.

On note ψ le paramétrage de S.

Pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on a : $\dfrac{\partial\psi}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2u \\ v \end{pmatrix}$ donc $\dfrac{\partial\psi}{\partial u}(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\dfrac{\partial\psi}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} 2v \\ 1 \\ u \end{pmatrix}$ donc $\dfrac{\partial\psi}{\partial v}(1,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La famille $\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial u}(u,v), \dfrac{\partial\psi}{\partial v}(u,v)\right)$ est libre donc A est un point régulier de C.

Le plan tangent à S en $A(1,1)$ admet pour équation : $\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ y-2 & 2 & 1 \\ z-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, c'est-à-dire

$$x + y - 3z - 1 = 0$$

2. Montrer que la courbe Γ admettant pour paramétrage : $t \mapsto \begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$ est tracée sur S et passe par A.

On note φ le paramétrage de Γ. On a $\varphi(t) = \psi(1,t)$ donc Γ est tracée sur S.
De plus $A = \psi(1,1) = \varphi(1)$ donc A est sur Γ.

3. Donner un paramétrage de la tangente à Γ en A, et vérifier qu'elle est dans P.

La tangente à Γ en A est $T = A + \text{Vect}(\overrightarrow{\varphi'(1)})$ d'où son paramétrage :

$$t \mapsto \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

De plus, pour tout réel t on a : $(2+2t) + (2+t) - 3(1+t) - 1 = 0$ donc $T \subset P$

EXERCICE 2

Soit C la courbe d'équations : $\left\{\begin{array}{l} x-y-1=0 \\ x^2-z^2-y=0 \end{array}\right.$.

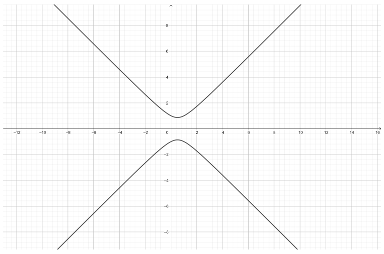
1. Déterminer la projection de C sur le plan (xOz), et la représenter.

On note C_y la projection de C sur le plan (xOz). On a :

$M(x,0,z) \in C_y \Leftrightarrow \exists y_0 \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{l} x-y_0=1 \\ x^2-z^2=y_0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists y_0 \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{l} y_0=x-1 \\ x^2-z^2=x-1 \end{array}\right.$.

On en déduit que C_y a pour équations : $\left\{\begin{array}{l} y=0 \\ z^2-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$.

On reconnait une hyperbole de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{2},0,0\right)$.



2. Donner une équation cartésienne du cylindre Σ de directrice C dont les génératrices sont parallèles à la droite d'équations $\left\{\begin{array}{l} x-2y-3=0 \\ x-y-z-2=0 \end{array}\right.$.

La droite D d'équations $\left\{\begin{array}{l} x-2y-3=0 \\ x-y-z-2=0 \end{array}\right.$ est dirigée par $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$. On a :

$M(x,y,z)\in\Sigma \Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}, M+t\overrightarrow{u}\in C \Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}, \left\{\begin{array}{l} (x+2t)-(y+t)=1 \\ (x+2t)^2-(z+t)^2-(y+t)=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}, \left\{\begin{array}{l} t=-x+y+1 \\ (x+2(-x+y+1))^2-(z+(-x+y+1))^2-(y+(-x+y+1))=0 \end{array}\right.$.

On obtient ainsi l'équation cartésienne de Σ :

$$3y^2-z^2-2xy+2xz-2yz-x+4y-2z+2=0$$

3. Donner une équation cartésienne de la surface de révolution S engendrée par la rotation de C autour de la droite (Ox).

$$\begin{aligned}
M(x,y,z)\in S &\Leftrightarrow \exists M(x_0,y_0,z_0)\in C, \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{MM_0}\cdot\overrightarrow{i}=\overrightarrow{0} \\ OM_0=OM \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \exists (x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3, \left\{\begin{array}{l} x_0-y_0=1 \\ x_0^2-z_0^2=y_0 \\ x_0=x \\ x^2+y^2+z^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \exists (x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3, \left\{\begin{array}{l} x_0=x \\ y_0=x-1 \\ z_0^2=x^2-x+1 \\ x^2+y^2+z^2=x^2+(x-1)^2+x^2-x+1 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Pour tout réel x, on a $x^2 - x + 1 > 0$ on en déduit une équation cartésienne de S :

$$2x^2 - y^2 - z^2 - 3x + 2 = 0$$

EXERCICE 3

Soit S la surface d'équation : $x^3 + y^3 - xy^2 - x^2y + 2xz^2 + 2yz^2 = 1$.

1. Donner une équation du plan tangent tangent à S en $A(1, 0, 0)$.

On note $f(x, y, z) = x^3 + y^3 - xy^2 - x^2y + 2xz^2 + 2yz^2 - 1$.
On a $\overrightarrow{\text{Grad}} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2 - y^2 - 2xy + 2z^2 \\ 3y^2 - 2xy - x^2 + 2z^2 \\ 4xz + 4yz \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\text{Grad}} f(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
On en déduit l'équation du plan tangent à S en A : $3x - y - 3 = 0$.

2. On pose $s = x + y$ et $t = x^2 + y^2 + z^2$. Montrer que l'équation de S s'écrit : $2st - s^3 = 1$.
$2st - s^3 = 2(x + y)(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y)^3 = x^3 + y^3 - xy^2 - x^2y + 2xz^2 + 2yz^2 = 1$

3. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe, dont le premier vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.
A l'aide de la question précédente, donner une équation de S dans le repère $(O, \mathscr{B})$.

Si on note (x, y, z) les coordonnées d'un point M dans le repère initial et (x_1, y_1, z_1) ses coordonnées dans $(O, \mathscr{B})$, on a : $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$ et $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x^2 + y^2 + z^2$, donc l'équation de S dans $(O, \mathscr{B})$ devient : $2\sqrt{2}x_1(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - 2\sqrt{2}x_1^3 = 1$, soit encore :

$$2\sqrt{2}x_1(y_1^2 + z_1^2) = 1$$

4. En déduire que S est une surface de révolution autour de la droite $D = (O, \overrightarrow{u})$.

Les intersections de S avec les plans d'équations $x_1 = k$ sont des cercles de centre sur l'axe $(O, \overrightarrow{u})$.
On en déduit que S est une surface de révolution autour de la droite $D = (O, \overrightarrow{u})$.