CB n°1 - Compléments d'algèbre linéaire - Sujet 1

1. Déterminer la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A suivante, ainsi que ses éléments caractéristiques.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$A^2 = \mathrm{I}_3$, donc A est la matrice de la symétrie s par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$.

2. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :
$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - y = 0\}$, $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0 \text{ et } x - y - z = 0\}$

a. Déterminer des bases de F et de G, et montrer que ces sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.

$F = \mathrm{Vect}\{(1,1,0),(0,0,1)\}$ et $G = \mathrm{Vect}\{(1,0,1)\}$;

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc F et G sont supplémentaires.

b. Donner la matrice dans la base canonique de la projection sur F parallèlement à G.

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

CB n°1 - Compléments d'algèbre linéaire - Sujet 2

1. Déterminer la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A suivante, ainsi que ses éléments caractéristiques.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A^2 = \mathrm{I}_3$, donc A est la matrice de la symétrie s par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\{(1, -1, 1)\}$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$.

2. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$, $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y = 0 \text{ et } x - z = 0\}$

a. Déterminer des bases de F et de G, et montrer que ces sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.

$F = \mathrm{Vect}\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ et $G = \mathrm{Vect}\{(1, -1, 1)\}$;

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc F et G sont supplémentaires.

b. Donner la matrice dans la base canonique de la projection sur F parallèlement à G.

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$