CB N°2 - INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES - SUJET 1

EXERCICE 1

Donner la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\operatorname{Arctan} t}\mathrm{d}t$

$t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{\operatorname{Arctan} t}$ est continue sur $]0,1]$ donc localement intégrable ; elle y est également positive.

En 0 : $\dfrac{\sqrt{t}}{\operatorname{Arctan} t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$; $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc par comparaison de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\operatorname{Arctan} t}\mathrm{d}t$ converge.

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t$

$t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ est continue sur $]0,1]$ donc localement intégrable.

Soit $x > 0$, on a : $\displaystyle\int_x^1 \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_x^1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t$ diverge.

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$

$t \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc localement intégrable.

En 0 : Pour $t \neq 0$, on a $\left|\sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right)\right| \leq 1$ donc par comparaison $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente.

En $+\infty$: $\sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right) \underset{t\to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$; $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente, donc par comparaison de fonctions positives sur $[1,+\infty[$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ converge.

Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ converge.

EXERCICE 2

Etablir la convergence et calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t$

$t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc localement intégrable.

Pour $t \geq 1$, on pose $u(t) = \ln t$ et $v(t) = \dfrac{-1}{t}$; u et v ainsi définies sont de classe C^1 sur $[1; +\infty[$, et $\lim\limits_{+\infty} uv = 0$ par croissances comparées.

Le théorème d'intégration par parties donne $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t$ de même nature, donc convergentes d'après le résultat sur les intégrales de Riemann, et par suite :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \left[\frac{-\ln t}{t}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{+\infty} = 1.$$

2. $\displaystyle\int_0^1 \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t$

$t \mapsto \sin(\ln(t))$ est continue sur $]0, 1]$ donc localement intégrable.

En posant $u = \ln t$ il vient $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$ et $\mathrm{e}^u \mathrm{d}u = \mathrm{d}t$.

$\varphi : u \mapsto \mathrm{e}^u$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et elle établit une bijection entre $]-\infty, 0]$ et $]0, 1]$.

Le théorème de changement de variable donne $\displaystyle\int_0^1 \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \sin u\, \mathrm{e}^u \mathrm{d}u$ de même nature, et égales en cas de convergence.

Soit $x \leq 0$.

$$\int_x^0 \sin u\, \mathrm{e}^u \mathrm{d}u = \mathrm{Im}\left(\int_x^0 \mathrm{e}^{(1+i)u}\mathrm{d}u\right) = \mathrm{Im}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(1+i)u}}{1+i}\right]_x^0\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x)}{2} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$$

On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \sin u\, \mathrm{e}^u \mathrm{d}u$ converge, et par suite que $\displaystyle\int_0^1 \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $-\dfrac{1}{2}$

Remarque : Une autre démonstration est proposée à la fin du corrigé.

CB n°2 - Intégrales généralisées - Sujet 2

EXERCICE 1

Donner la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$

$t \mapsto 1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right)$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc localement intégrable ; elle y est également positive.

En 0 : $0 \leq 1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right) \leq 2$ donc par comparaison de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^1 1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$ est convergente.

En $+\infty$: $1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2t^2}$; $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente, donc par comparaison de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} 1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$ converge.

Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$ converge.

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t$

$t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc localement intégrable.

Soit $x \geq 1$, on a : $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t$ diverge.

Autre méthode : Pour $t \geq \mathrm{e}$, on a : $\frac{\ln(t)}{t} \geq \frac{1}{t}$; $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann divergente, donc par comparaison, $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t$ diverge, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t$ diverge.

3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\tan\frac{1}{t}\mathrm{d}t$

$t \mapsto \frac{1}{t}\tan\frac{1}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc localement intégrable ; elle y est également positive.

En $+\infty$: $\frac{1}{t}\tan\frac{1}{t} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$; $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente, donc par comparaison de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\tan\frac{1}{t}\mathrm{d}t$ converge.

EXERCICE 2

Etablir la convergence et calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$

$t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1]$ donc localement intégrable.

Pour $t>0$, on pose $u(t)=\ln t$ et $v(t)=2\sqrt{t}$; u et v ainsi définies sont de classe C^1 sur $]0,1]$, et $\lim\limits_{0} uv = 0$, par croissances comparées.

Le théorème d'intégration par parties donne $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ de même nature, donc convergentes d'après le résultat sur les intégrales de Riemann, et par suite :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \left[2\sqrt{t}\ln t\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = -2\left[2\sqrt{t}\right]_0^1 = -4.$$

Autre méthode : En posant $u=\sqrt{t}$, il vient $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$.

$\varphi : u \mapsto u^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et elle établit une bijection entre $]0,1]$ et lui même.

Le théorème de changement de variable donne $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \ln(u^2)\,2\,\mathrm{d}u$ de même nature et égale en cas de convergence.

Pour $u>0, \ln(u^2)=2\ln(u)$ et $\displaystyle\int_0^1 \ln(u)\mathrm{d}u$ est une intégrale de référence convergente, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 4\left[u\ln(u)-u\right]_0^1 = -4$, par croissances comparées.

2. $\displaystyle\int_0^1 \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t$

$t \mapsto \cos(\ln(t))$ est continue sur $]0,1]$ donc localement intégrable.

En posant $u=\ln t$ il vient $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$ et $\mathrm{e}^u\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$.

$\varphi : u \mapsto \mathrm{e}^u$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et elle établit une bijection entre $]-\infty,0]$ et $]0,1]$.

Le théorème de changement de variable donne $\displaystyle\int_0^1 \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \cos u\,\mathrm{e}^u\mathrm{d}u$ de même nature, et égales en cas de convergence.

Soit $x \leq 0$.

$$\int_x^0 \cos u\,\mathrm{e}^u\mathrm{d}u = \mathrm{Re}\left(\int_x^0 \mathrm{e}^{(1+i)u}\mathrm{d}u\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(1+i)u}}{1+i}\right]_x^0\right) = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{e}^x(\cos x + \sin x)}{2} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \sin u\,\mathrm{e}^u\mathrm{d}u$ converge, et par suite que $\displaystyle\int_0^1 \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.

Remarque : Pour la dernière intégrale des deux sujets, on pouvait résoudre le problème différemment, à l'aide de deux intégrations par parties :

Partons par exemple de $\displaystyle\int_x^1 \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t$, pour $x > 0$.

On pose $u(t) = \cos(\ln(t))$, et $v(t) = t$; u et v sont de classe C^1 sur $[x, 1]$ donc le théorème d'intégration par parties donne :

$\displaystyle\int_x^1 \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t = [t\cos(\ln(t))]_x^1 + \int_x^1 t\frac{\sin(\ln(t))}{t}\mathrm{d}t = 1 - x\cos(\ln x) + \int_x^1 \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t.$

Considérons l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 \sin(\ln t)\,\mathrm{d}t$.

On pose $u(t) = \sin(\ln(t))$ et $v(t) = t$; u et v sont de classe C^1 sur $[x, 1]$ donc le théorème d'intégration par parties donne :

$\displaystyle\int_x^1 \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t = [t\sin(\ln(t))]_x^1 - \int_x^1 t\frac{\cos(\ln(t))}{t}\mathrm{d}t = -x\sin(\ln(x)) - \int_x^1 \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t.$

On obtient donc :

$\displaystyle\int_x^1 \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t = 1 - x\cos(\ln x) - x\sin(\ln(x)) - \int_x^1 \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t$ et donc

$\displaystyle\int_x^1 \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(1 - x\cos(\ln x) - x\sin(\ln(x))\right).$

En faisant tendre x vers 0, on retrouve le résultat déjà démontré !