CB n°3 - Réduction - Sujet 1

EXERCICE 1

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$? Justifier la réponse.
Si oui, donner la matrice diagonale qui leur est semblable, ainsi qu'une base de diagonalisation.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & -9 & 5 \\ 5 & -7 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 2 & 8 & -2 \\ 1 & 14 & -3 \end{pmatrix}$$

- $\chi_A = (X-3)(X-2)^2$.
  $\mathrm{rg}(A - 2\mathrm{I}_3) = 1$, donc $\dim(E_2(A)) = 2 = m(2)$. De plus, $\dim(E_3(A)) = 1 = m(3)$.
  Le polynôme caractéristique est scindé, et les dimensions des espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres correspondantes.
  On en déduit que A est diagonalisable, semblable à $\mathrm{diag}(2, 2, 3)$.
  De plus, $\mathrm{E}_2(A) = \mathrm{Vect}\{(1, -3, 0), (0, 2, 1)\}$ et $\mathrm{E}_3(A) = \mathrm{Vect}\{(1, 0, 1)\}$, on a donc une base de diagonalisation : $((1, -3, 0), (0, 2, 1), (1, 0, 1))$.

- $\chi_B = (X+2)(X-2)(X-3)$ est scindé à racines simples donc B est diagonalisable, semblable à $\mathrm{diag}(-2, 2, 3)$.
  $\mathrm{E}_{-2}(B) = \mathrm{Vect}\{(1, 1, 0)\}$, $\mathrm{E}_2(B) = \mathrm{Vect}\{(-1, 0, 1)\}$, $\mathrm{E}_3(B) = \mathrm{Vect}\{(1, 1, 1)\}$; on a donc une base de diagonalisation : $((1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1))$.

- $\chi_C = (X-4)^2(X+2)$.
  $\mathrm{rg}(C - 4\mathrm{I}_3) = 2$, donc $\dim(E_4(C)) \neq m(4)$. On en déduit que C n'est pas diagonalisable.

EXERCICE 2

Soient $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe une matrice inversible P, **que l'on déterminera**, telle que

$$M = PTP^{-1}$$

On note f l'endomorphisme canoniquement associé à M.
$\det(M - \mathrm{I}_3) = \det(M + \mathrm{I}_3) = 0$; on en déduit que 1 et -1 sont valeurs propres de M.
Le polynôme caractéristique de M admet au moins deux racines et il est de degré 3, il est donc scindé dans $\mathbb{R}$, et M est trigonalisable.
De plus, la trace est un invariant de similitude, et $\mathrm{tr}(M) = -1$, on en déduit que f admet une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, dans une base (u, v, w), telle que $u \in E_1(f)$ et $v \in E_{-1}(f)$.
$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\,((1, 1, 1))$; on prend $u = (1, 1, 1)$.
$\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\,((1, 1, 2))$; on prend $v = (1, 1, 2)$.
M semblable à T si, et seulement s'il existe $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\{u, v, w\}$ est libre et $f(w) = v - w$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x + y - 2z = 1 \\ 4x - 2z = 2 \end{array} \right.$$

$w = (1, 0, 1)$ convient, car $\det(u, v, w) \neq 0$.

Finalement, $M = PTP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

CB N°3 - RÉDUCTION - SUJET 2

EXERCICE 1

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$? Justifier la réponse.
Si oui, donner la matrice diagonale qui leur est semblable, ainsi qu'une base de diagonalisation.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 8 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -5 \\ -3 & -1 & 3 \\ 6 & 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

- $\chi_A = (X + 1)(X - 3)^2$.
  $\text{rg}(A - 3\text{I}_3) = 2$, donc $\dim(E_3(A)) \neq m(2)$. On en déduit que A n'est pas diagonalisable.

- $\chi_B = (X + 1)(X - 2)(X - 3)$ est scindé à racines simples donc B est diagonalisable, semblable à $\text{diag}(-1, 2, 3)$.
  $\text{E}_{-1}(B) = \text{Vect}\{(1, -1, 1)\}$, $\text{E}_2(B) = \text{Vect}\{(1, 1, 2)\}$, $\text{E}_3(B) = \text{Vect}\{(1, 0, 1)\}$; on a donc une base de diagonalisation : $((1, -1, 1), (1, 1, 2), (1, 0, 1))$.

- $\chi_C = (X + 1)^2(X - 2)$.
  $\text{rg}(C + \text{I}_3) = 1$, donc $\dim(E_{-1}(C)) = 2 = m(-1)$. De plus, $\dim(E_2(C)) = 1 = m(2)$.
  Le polynôme caractéristique est scindé, et les dimensions des espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres correspondantes.
  On en déduit que C est diagonalisable, semblable à $\text{diag}(-1, -1, 2)$.
  De plus, $\text{E}_{-1}(C) = \text{Vect}\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ et $\text{E}_2(A) = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$, on a donc une base de diagonalisation : $((1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1))$.

EXERCICE 2

Soient $M = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -8 & 10 & -7 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe une matrice inversible P, **que l'on déterminera**, telle que

$$M = PTP^{-1}$$

On note f l'endomorphisme canoniquement associé à M.
$\det(M - \text{I}_3) = \det(M + 2\text{I}_3) = 0$; on en déduit que 1 et -2 sont valeurs propres de M.
Le polynôme caractéristique de M admet au moins deux racines et il est de degré 3, il est donc scindé dans $\mathbb{R}$, et M est trigonalisable.

De plus, la trace est un invariant de similitude, et $\mathrm{tr}(M) = -3$, on en déduit que f admet une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -2 & b \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, dans une base (u, v, w), telle que $u \in E_1(f)$ et $v \in E_{-2}(f)$.
$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\,((1, 0, -1))$; on prend $u = (1, 0, -1)$.
$\mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\,((0, 1, 2))$; on prend $v = (0, 1, 2)$.
M semblable à T si, et seulement s'il existe $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\{u, v, w\}$ est libre et $f(w) = v - 2w$.

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -8 & 10 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6x - 6y + 3z = 0 \\ -x + 2y - z = 1 \\ -8x + 10y - 5z = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + z = -1 \\ 2y - z = 2 \end{array} \right.$$

$w = (1, 1, 0)$ convient, car $\det(u, v, w) \neq 0$.

Finalement, $M = PTP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.