CB n°4 - Séries entières - Sujet 1

EXERCICE 1

Déterminer les rayons de convergence et les sommes des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-n} x^{2n}$

2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1} x^n$

3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)^2}{n!} x^n$

4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n2^n}$

5. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$

EXERCICE 2

1. Développer en série entière les fonctions f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$f_1(x) = \frac{1}{x-3}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{(x-3)^2}, \qquad f_3(x) = \frac{1}{2x-1}$$

en précisant les rayons de convergence.

2. En déduire le développement en série entière et le rayon de convergence de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x+12}{(2x-1)(x-3)^2}$$

CB n°4 - Séries entières - Sujet 2

EXERCICE 1

Déterminer les rayons de convergence et les sommes des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\mathrm{e}^n}{n!} x^n$

2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n+1} x^n$

3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-1}{n!} x^n$

4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{3^n} x^n$

5. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{n+1}$

EXERCICE 2

1. Développer en série entière les fonctions f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$f_1(x) = \frac{1}{x-2}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{(x-2)^2}, \qquad f_3(x) = \frac{1}{3x-1}$$

en précisant les rayons de convergence.

2. En déduire le développement en série entière et le rayon de convergence de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x+8}{(3x-1)(x-2)^2}$$