CB n°5 - Espaces préhilbertiens réels - Sujet 1

EXERCICE 1

Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]$, on note

$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
φ est clairement symétrique et linéaire par rapport à sa première composante, donc bilinéaire.
Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]; \varphi(P, P) = P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 \geq 0$ et $\varphi(P, P) = 0$ si et seulement si $P(0) = P(1) = P(2) = 0$. Comme P est de degré au plus 2 et qu'il a au moins trois racines, il est nul.
Ainsi, φ est définie positive, et c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

2. φ est-il un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$?
$P = X(X-1)(X-2)$ vérifie $\varphi(P, P) = 0$, donc φ n'est pas un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

3. On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire φ. On note $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(1) = 0\}$

a. Donner une base de F.
$F = \text{Vect}\{X-1, X(X-1)\}$.

b. Expliciter la projection orthogonale sur F du polynôme X^2.
On orthonormalise la base de F donnée ci-dessus en (P_1, P_2).
$\varphi(X-1, X-1) = 2$; on prend $P_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(X-1)$.
On pose $Q_2 = X(X-1) - \dfrac{1}{2}\varphi(X-1, X(X-1))(X-1) = X^2 - 2X + 1$.
$\varphi(Q_2, Q_2) = 2$; on prend $P_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(X^2 - 2X + 1)$.
on a : $p_F(X^2) = \varphi(X^2, P_1)P_1 + \varphi(X^2, P_2)P_2 = \dfrac{1}{2}\varphi(X^2, X-1)(X-1) + \dfrac{1}{2}\varphi(X^2, (X-1)^2)(X-1)^2 = 2(X-1) + 2(X-1)^2 = 2X^2 - 2X$

EXERCICE 2

On se place dans $E = C^2([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $(f, g) \in E^2$, on note :

$$\psi(f, g) = \int_0^1 \big(f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que ψ est un produit scalaire sur E.
ψ est clairement symétrique et linéaire par rapport à sa première variable (par linéarité de l'intégrale et de l'opérateur de dérivation), donc bilinéaire.
Soit $f \in E; \psi(f, f) = \displaystyle\int_0^1 \big(f(t)^2 + f'(t)^2\big)\,\mathrm{d}t \geq 0$, et $\psi(f, f) = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0,\ \forall t \in [0, 1]$.
ψ est donc définie positive, et c'est un produit scalaire sur E.

2. On note $F = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in E, f'' = f\}$, et on munit E du produit scalaire ci-dessus.

a. Montrer que F et G sont orthogonaux (on pourra utiliser une intégration par parties).
Soit $(f, g) \in F \times G; \psi(f, g) = \displaystyle\int_0^1 \big(f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)g''(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t$.

Dans la première intégrale, on effectue une intégration par parties, toutes les fonctions étant de classe C^1 ; on obtient :

$\psi(f,g) = \big[f(t)g'(t)\big]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t = 0$ (car $f(0) = f(1) = 0$).

On en déduit que F et G sont orthogonaux.

b. Justifier que $f_1 : t \mapsto \mathrm{e}^t$ et $f_2 : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ forment une base orthogonale de G.

G est l'ensemble des fonctions de classe C^2 solutions sur $[0,1]$ de l'équation différentielle $y'' - y = 0$, admettant 1 et -1 comme solutions de l'équation caractéristique. C'est un sous-espace vectoriel de dimension 2, dont f_1 et f_2 sont deux vecteurs non liés, qui en forment donc une base.

$\psi(f_1, f_2) = \displaystyle\int_0^1 (1-1)\mathrm{d}t = 0$; la base (f_1, f_2) est donc orthogonale pour le produit scalaire ψ.

c. Cette base est-elle orthonormée ?

$\psi(f_1, f_1) = \displaystyle\int_0^1 2\mathrm{e}^{2t} = \mathrm{e}^2 - 1 \neq 1$ donc la base n'est pas orthonormée.

d. Montrer que pour tout $f \in E$, il existe $g \in G$ tel que $f - g \in F$.

Soient $f \in E$ et $g = \lambda \mathrm{e}^t + \mu \mathrm{e}^{-t} \in G$;

$f - g \in F \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = \lambda + \mu \\ f(1) = \lambda \mathrm{e}^1 + \mu \mathrm{e}^{-1} \end{cases}$;

comme $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{e}^1 & \mathrm{e}^{-1} \end{vmatrix} \neq 0$, ce système d'inconnues (λ, μ) admet une solution donc il existe $g \in G$ tel que $f - g \in F$.

e. Que peut-on en déduire pour F et G ?

Le résultat précédent donne $E \subset F + G$, l'autre inclusion étant évidente, on a $E = F + G$.

Comme F et G sont orthogonaux, on a de plus $F \overset{\perp}{\oplus} G = E$.

CB N°5 - Espaces préhilbertiens réels - Sujet 2

EXERCICE 1

Pour $(f,g) \in \left(C^2([0,1],\mathbb{R})\right)^2$, on note :

$$\varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $E = C^2([0,1],\mathbb{R})$.
φ est clairement symétrique et linéaire par rapport à sa première variable (par linéarité de l'intégrale et de l'opérateur de dérivation), donc bilinéaire.
Soit $f \in E; \varphi(f,f) = f(0)^2 + \displaystyle\int_0^1 f'(t)^2\mathrm{d}t \geq 0\,;$
de plus $\varphi(f,f) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ et $f'(t) = 0,\ \forall t \in [0,1] \Leftrightarrow f(t) = f(0) = 0, \forall t \in [0,1]$.
φ est donc définie positive, et c'est un produit scalaire sur E.

2. On note $F = \{f \in E, f'' = f\}$

a. Justifier que $f_1 : t \mapsto \mathrm{e}^t$ et $f_2 : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ forment une base orthogonale de F.
F est l'ensemble des fonctions de classe C^2 solutions sur $[0,1]$ de l'équation différentielle $y'' - y = 0$, admettant 1 et -1 comme solutions de l'équation caractéristique. C'est un sous-espace vectoriel de dimension 2, dont f_1 et f_2 sont deux vecteurs non liés, qui en forment donc une base.
$\varphi(f_1,f_2) = 1 - \displaystyle\int_0^1 1\mathrm{d}t = 0\,;$ la base (f_1,f_2) est donc orthogonale pour le produit scalaire φ.

b. Expliciter la projection orthogonale sur F pour le produit scalaire φ de la fonction $t \mapsto t^2$.
On orthonormalise la base (f_1,f_2) en normant les deux vecteurs qui sont déjà orthogonaux.
$\varphi(f_1,f_1) = \dfrac{1}{2}(1+\mathrm{e}^2); \varphi(f_2,f_2) = \dfrac{1}{2}(3-\mathrm{e}^{-2})\,;$
on note $g_1 = \sqrt{\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^2}}f_1$, $g_2 = \sqrt{\dfrac{2}{3-\mathrm{e}^{-2}}}f_2$, et $f : t \mapsto t^2$.
On a : $p_F(f) = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^2}\varphi(f,f_1)f_1 + \dfrac{2}{3-\mathrm{e}^{-2}}\varphi(f,f_2)f_2$
Des intégrations par parties (toutes les fonctions étant de classe C^1), donnent :
$\varphi(f,f_1) = \displaystyle\int_0^1 2t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \left[2t\mathrm{e}^t\right]_0^1 - 2\int_0^1 \mathrm{e}^t\mathrm{d}t = 2$ et
$\varphi(f,f_2) = -\displaystyle\int_0^1 2t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left[2t\mathrm{e}^{-t}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 4\mathrm{e}^{-1} - 2$
On a donc : $p_F(f) = \dfrac{4}{1+\mathrm{e}^2}f_1 + \dfrac{4(2\mathrm{e}^{-1}-1)}{3-\mathrm{e}^{-2}}f_2$

EXERCICE 2

On note $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = P(1) = 0\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$, et en donner une base.
$P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in E \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a+b+c+d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -a-b \\ d = 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow P = a(X^3 - X) + b(X^2 - X) \Leftrightarrow P \in \mathrm{Vect}\{X(X^2-1), X(X-1)\}$. E est donc un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ dont $\left(X(X^2-1), X(X-1)\right)$ est une base.

2. Pour $(P, Q) \in E^2$, on note

$$\psi(P, Q) = -\int_0^1 (P(x)Q''(x) + P''(x)Q(x))\mathrm{d}x$$

a. Montrer que ψ définit un produit scalaire sur E (on pourra utiliser une intégration par parties).
ψ est clairement symétrique et linéaire par rapport à sa première variable (par linéarité de l'intégrale et de l'opérateur de dérivation).
Soit $P \in E$; toutes les fonctions étant de classe C^1, une intégration par parties donne :
$\psi(P, P) = -2\int_0^1 P(x)P''(x)\mathrm{d}x = -2\left[P(x)P'(x)\right]_0^1 + 2\int_0^1 P'(x)^2\mathrm{d}x = 2\int_0^1 P'(x)^2\mathrm{d}x \geq 0$, et
$\psi(P, P) = 0 \Leftrightarrow P'(x) = 0,\ \forall x \in [0, 1] \Leftrightarrow P(x) = P(0) = 0,\ \forall x \in [0, 1]$; P admettant une infinité de racines, c'est le polynôme nul.
Ainsi, φ est définie positive et c'est un produit scalaire sur E.

b. ψ définit-il un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$? Justifier la réponse.
On a $\psi(X^0, X^0) = 0$ donc ψ n'est pas un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.

c. Donner une base orthonormée de E pour le produit scalaire ψ.
On orthonormalise la base $\big(X(X^2-1), X(X-1)\big)$ en (P_1, P_2) :
$\psi(X^3 - X, X^3 - X) = -2\int_0^1 (6x^4 - 6x^2)\mathrm{d}x = \frac{8}{5}$; on prend $P_1 = \sqrt{\frac{5}{8}}(X^3 - X)$.
Soit $Q_2 = X^2 - X - \frac{5}{8}\psi(X^2 - X, X^3 - X)(X^3 - X)$.
$\psi(X^2 - X, X^3 - X) = -\int_0^1 (6x(x^2 - x) + 2(x^3 - x)\mathrm{d}x = 1$, d'où $Q_2 = \frac{5}{8}X^3 + X^2 - \frac{3}{8}X$
$\psi(Q_2, Q_2) = \frac{1}{24}$
On prend $P_2 = 2\sqrt{6}Q_2$