

CB N°8 - FONCTIONS A PLUSIEURS VARIABLES - SUJET 1**Exercice 1**

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

1. Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .
2. La fonction f est-elle de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 ?

Exercice 2

Etudier les extrema locaux des fonctions suivantes définies sur \mathbb{R}^2 , et préciser si les éventuels extrema sont globaux.

1. $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x + 12y$
2. $g(x, y) = x^2 - x^4 + y^4$

Exercice 3

Résoudre sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ l'équation aux dérivées partielles :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = y,$$

à l'aide du changement de variable $(u = x, v = \frac{y}{x})$.

CB N°8 - FONCTIONS A PLUSIEURS VARIABLES - SUJET 2**Exercice 1**

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - x^2y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

1. Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .
2. La fonction f est-elle de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 ?

Exercice 2

Etudier les extrema locaux des fonctions suivantes définies sur \mathbb{R}^2 , et préciser si les éventuels extrema sont globaux.

1. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 6x^2 - 6y^2$
2. $g(x, y) = x^3 - x^5 + y^4$

Exercice 3

Résoudre sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ l'équation aux dérivées partielles :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = x + y,$$

à l'aide du changement de variable $(u = x - y, v = xy)$.