CB N°8 - FONCTIONS A PLUSIEURS VARIABLES - SUJET 1

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

1. Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

On remarque tout d'abord que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = -f(y,x)$. On peut donc faire l'étude par rapport à une variable, l'autre se déduisant de cette antisymétrie.
D'après les théorèmes généraux, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, et pour $(x,y) \neq (0,0)$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

En $(0,0)$, on a : $\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$
On en déduit que f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable en $(0,0)$ qui est nulle.
On a de plus, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:
$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| \leq \dfrac{|x^4y| + 4|x^2y^3| + |y^5|}{\|(x,y)\|^2} \leq \dfrac{6\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^2} \leq 6\|(x,y)\|^3 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$

On en déduit que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

2. La fonction f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

On a : $\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = -1 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -1$. On en déduit que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe et vaut -1.
L'antisymétrie donne par ailleurs $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe et vaut 1.
Ainsi, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, donc d'après le théorème de Schwarz, f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

Etudier les extrema locaux des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$, et préciser si les éventuels extrema sont globaux.

1. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x + 12y$

f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale en ses variables.
Ses points critiques sont : $A_1 = (2,-1), A_2 = (-1,2), A_3 = (1,-2), A_4 = (-2,1)$.
On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$.
$\det(H_f(A_1)) > 0$ et $\operatorname{tr}(H_f(A_1)) > 0$ donc f admet un minimum local en A_1 ;
$\det(H_f(A_2)) < 0$ donc A_2 est un point col ;
$\det(H_f(A_3)) < 0$ donc A_3 est un point col ;
$\det(H_f(A_4)) > 0$ et $\operatorname{tr}(H_f(A_4)) < 0$ donc f admet un maximum local en A_4 ;
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x,0) = \pm\infty$ donc les extrema ne sont pas globaux.

2. $g(x,y) = x^2 - x^4 + y^4$

f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale en ses variables.
Ses points critiques sont : $A_1 = (0,0)$, $A_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $A_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

$\rightsquigarrow$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) - f(0,0) = x^2(1-x^2) + y^4$ donc pour tout $y \in \mathbb{R}$ et pour $x^2 \leq 1$, $f(x,y) - f(0,0) \geq 0$.

On en déduit que f admet un minimum local en $(0,0)$.

Par ailleurs, $f(2,0) = -12 < f(0,0)$ donc ce minimum n'est pas global.

$\rightsquigarrow$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}, y\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = -(x^4 + 2\sqrt{2}x^3 + 2x^2) + y^4$.

Ainsi, $\forall y \in \mathbb{R}^*, f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, y\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) < 0$.

On en déduit que A_2 est un point col, de même que A_3 car $f(A_2) = f(A_3)$.

Exercice 3

Résoudre sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = y,$$

à l'aide du changement de variable $\left(u = x, v = \frac{y}{x}\right)$.

On pose $f(x,y) = g(u,v)$; on a : $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v}$.

Ainsi, après changement de variable l'équation devient :

$$u\frac{\partial g}{\partial u} = uv$$

Comme $x > 0$, on a $u > 0$ donc l'équation équivaut à

$$\frac{\partial g}{\partial u} = v$$

On en déduit les solutions sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$:
$(x,y) \mapsto y + K\left(\frac{y}{x}\right)$, où K est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

CB n°8 - FONCTIONS A PLUSIEURS VARIABLES - SUJET 2

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

1. Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

D'après les théorèmes généraux, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, et pour $(x,y) \neq (0,0)$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4y + 3x^2y^3 - 2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^5 - 2x^4y - x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

En $(0,0)$, on a : $\dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$

On en déduit que f admet des dérivées partielles par rapport à ses deux variables en $(0,0)$ qui sont nulles.

On a de plus, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| \leq \dfrac{|x^4y| + 3\,|x^2y^3| + 2\,|xy^4|}{\|(x,y)\|^2} \leq \dfrac{6\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^2} \leq 6\|(x,y)\|^3 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$

et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| \leq \dfrac{|x^5| + 2\,|x^4y| + |x^3y^2|}{\|(x,y)\|^2} \leq \dfrac{4\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^2} \leq 4\|(x,y)\|^3 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$

On en déduit que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

2. La fonction f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

On a : $\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe et vaut 0.

$\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = 1 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$. On en déduit que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe et vaut 1.

Ainsi, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, donc d'après le théorème de Schwarz, f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

Etudier les extrema locaux des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$, et préciser si les éventuels extrema sont globaux.

1. $f(x,y) = x^3 + y^3 + 6x^2 - 6y^2$

f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale en ses variables.

Ses points critiques sont : $A_1 = (0,0)$, $A_2 = (0,4)$, $A_3 = (-4,0)$, $A_4 = (-4,4)$.

On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+12 & 0 \\ 0 & 6y-12 \end{pmatrix}$.

$\det(H_f(A_1)) < 0$ donc A_1 est un point col ;

$\det(H_f(A_2)) > 0$ et $\mathrm{tr}(H_f(A_2)) > 0$ donc f admet un minimum local en A_2 ;

$\det(H_f(A_3)) > 0$ et $\mathrm{tr}(H_f(A_3)) < 0$ donc f admet un maximum local en A_3 ;

$\det(H_f(A_4)) < 0$ donc A_4 est un point col ;

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x,0) = \pm\infty$ donc les extrema ne sont pas globaux.

2. $g(x, y) = x^3 - x^5 + y^4$

f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale en ses variables.
Ses points critiques sont : $A_1 = (0, 0), A_2 = \left(\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right), A_3 = \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right)$.

$\rightsquigarrow$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) - f(0, 0) = x^3(1 - x^2) + y^4$ donc pour $x \in]-1, 0[, f(x, 0) - f(0, 0) < 0$ et pour $x \in]0, 1[, f(x, 0) - f(0, 0) > 0$.
On en déduit que A_1 est un point col.

$\rightsquigarrow$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f\left(x + \sqrt{\frac{3}{5}}, y\right) - f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right) = -x^5 - \sqrt{15}x^4 - 5x^3 - \frac{3\sqrt{15}}{5}x^2 + y^4$.
Ainsi, $\forall y \in \mathbb{R}^*, f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, y\right) - f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right) > 0$ et $f\left(x + \sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right) - f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right) \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{3\sqrt{15}}{5}x^2$ donc pour x proche de 0, $f\left(x + \sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right) - f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right) < 0$.
On en déduit que A_2 est un point col.

$\rightsquigarrow$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f\left(x - \sqrt{\frac{3}{5}}, y\right) - f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right) = x^2\left(\frac{3\sqrt{15}}{5} - 5x + \sqrt{15}x^2 - x^3\right) + y^4$.
Ainsi, pour x suffisamment proche de 0, et pour tout y, $f\left(x - \sqrt{\frac{3}{5}}, y\right) - f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right) \geq 0$.
On en déduit que f admet un minimum local en A_3.
Par ailleurs $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x, 0) = -\infty$ donc le minimum n'est pas global.

Exercice 3

Résoudre sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = x + y,$$

à l'aide du changement de variable $(u = x - y, v = xy)$.

On pose $f(x, y) = g(u, v)$; on a : $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + y\frac{\partial g}{\partial v}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial u} + x\frac{\partial g}{\partial v}$.
Ainsi, après changement de variable l'équation devient :

$$(x + y)\frac{\partial g}{\partial u} = x + y$$

Comme $x + y > 0$, l'équation équivaut à

$$\frac{\partial g}{\partial u} = 1$$

On en déduit les solutions sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$:
$(x, y) \mapsto x - y + K(xy)$, où K est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.