- CC1-S1 - - 2016-2017 -

– Correction - Algèbre –

Exercice 1

1. a. $\det(A) = 12$

b. Le déterminant étant non nul, on en déduit que f est bijective.

2. On cherche λ tel que $\det(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 0$; on trouve : $\lambda \in \{2; 3\}$.

3. a. $E_2 = \mathrm{Vect}\{(2; -1; -1), (1; 0; -1)\}$
$E_3 = \mathrm{Vect}\{(-1; 1; 1)\}$.

b. On a $\dim(E_2)+\dim(E_3)=\dim(\mathbb{R}^3)$.
Ensuite, soit on vérifie que $\{(2; -1; -1), (1; 0; -1), (-1; 1; 1)\}$ est libre, soit on remarque que :
$a \in E_2 \cap E_3 \Rightarrow f(a) = 2a = 3a \Rightarrow a = 0$.

c. Tout vecteur a de E_2 vérifie $f(a) = 2a$, et tout vecteur b de E_3 vérifie $f(b) = 3b$, donc la matrice de f dans la base $((2; -1; -1), (1; 0; -1), (-1; 1; 1))$ est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Dans la base $((2; -1; -1), (1; 0; -1), (-1; 1; 1))$, la matrice de p est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc dans cette base la matrice de $f \circ p$ est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans la base canonique, la matrice de $f \circ p$ est :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Si $m = -1$, $S = \varnothing$;

Si $m = -2$, $S = \{(1 + y, y, -3)/y \in \mathbb{R}\}$;

Sinon, $S = \left\{ \left(\dfrac{m+2}{m+1}, -1, \dfrac{m^2 - m - 3}{m+1} \right) \right\}$.