Math. - CC 2 - S1 - Algèbre

vendredi 25 novembre 2016 - Durée 1 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1

On considère $E = \mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à une indéterminée X et à coefficients réels.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n le sous-espace vectoriel de E des polynômes de degré inférieur ou égal à n et B_n la base canonique $(X^0, X, X^2, \cdots, X^n)$.

1. On considère $n \in \mathbb{N}$ et l'application suivante :

$$u_n : \left| \begin{array}{ccc} E_n & \to & E \\ P & \mapsto & u_n(P) = P'' - 2XP' \end{array} \right. .$$

a. Montrer que u_n est un endomorphisme de E_n.

b. Donner la matrice de u_n dans la base B_n.

c. Déterminer le spectre de u_n et justifier que u_n est diagonalisable.

2. On considère l'application suivante :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = e^{-x^2} \end{array} \right. .$$

a. Soit $n \in \mathbb{N}$.

i. Montrer que la dérivée d'ordre n de la fonction f est de la forme $f^{(n)} = f \times H_n$ où $H_n \in E_n$ et vérifie $H_{n+1} = H_n' - 2XH_n$.

ii. Montrer que $B_n' = (H_0, H_1, \cdots, H_n)$ est une base de E_n.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$H_{n+1} = -2XH_n - 2nH_{n-1}.$$

(On pourra utiliser la relation $\dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(e^{-x^2}\right) = \dfrac{d^n}{dx^n}\left(-2xe^{-x^2}\right)$ et la formule de Leibniz)

c. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$H_n' = -2nH_{n-1}.$$

d. Montrer que, pour tout couple d'entiers (k, n) tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, H_k est un vecteur propre de u_n et donner la valeur propre correspondante.

e. Donner la matrice de u_n dans la base B_n'.

T.S.V.P.

Exercice 2

On considère le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ et un endomorphisme f de E qui admet $\lambda = \dfrac{e^{2i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}}$ pour valeur propre.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de f.

2. Justifier que $f \circ f + \dfrac{1}{\sqrt{2}} f + \dfrac{1}{2} Id_E = 0$.

3. Soit a un vecteur non nul de E.

- **a.** Montrer que $B = (a, f(a))$ est une base de E.
- **b.** Déterminer la matrice A de f dans la base B.
- **c.** Calculer, pour tout entier n, la valeur de A^n.

4. Montrer que, pour tout $x \in E$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f^n(x) = 0$.

Fin de l'énoncé d'algèbre