⋆ Spé - St Joseph/ICAM Toulouse ⋆

Math. - CC 2 - S1 - Analyse

vendredi 25 novembre 2016 - Durée 1 h 30

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1

On considère l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\mathrm{d}t$$

1. Montrer que l'intégrale I converge.

2. Montrer que :

$$\forall t \in]0,1[, \quad \frac{t-1}{t} \leq \ln t \leq t-1$$

3. Montrer que $\forall x \in]0,1[$, $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\ln t}\mathrm{d}t$ converge et, à l'aide d'un changement de variable, montrer que :

$$\forall x \in]0,1[, \quad \int_0^x \frac{t}{\ln t}\mathrm{d}t = \int_0^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

4. Déduire des questions précédentes un encadrement de $\displaystyle\int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\mathrm{d}t$, puis déterminer I.

Exercice 2

On considère la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+2)}$.

On note R son rayon de convergence, et $S(x)$ sa somme lorsque la série converge.

1. a. Déterminer R.

b. Préciser le comportement de la série aux bornes de son intervalle de convergence.

2. a. Rappeler le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$ en 0, ainsi que son rayon de convergence.

b. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$, sur un intervalle à préciser.

3. a. Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+2}$$

b. Expliciter $S(x)$ pour $x \in]-R, R[$.

c. Vérifier que S est continue en 0.

4. a. En utilisant la décomposition en éléments simples établie à la question **3.a**, calculer les sommes des séries numériques $S(1)$ et $S(-1)$.

b. En déduire que S est continue en -1 et 1.

Fin de l'énoncé d'analyse