- CC2-S1 - - 2016-2017 -

– Correction - Analyse –

Exercice 1

1. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t}$ est continue sur $]0,1[$, donc localement intégrable.
$\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to 1} f(t) = 1$; la fonction se prolonge par continuité en 0 et en 1, I converge donc.

2. Pour $t \in]0,1]$ on note : $h_1(t) = t\ln t - t + 1$ et $h_2(t) = t - 1 - \ln t$.
h_1 et h_2 sont dérivables sur $]0,1]$ et $\forall t \in]0,1], h_1'(t) = \ln t \leq 0$, $h_2'(t) = 1 - \dfrac{1}{t} \leq 0$, ainsi h_1 et h_2 sont décroissantes sur $]0,1]$ et $\forall t \in]0,1[, h_1(t) \geq h_1(1) = 0, h_2(t) \geq h_2(1) = 0$.
D'où $\forall t \in]0,1[, t-1 \leq t\ln t$ et $\ln t \leq t-1$, puis $\forall t \in]0,1[, \dfrac{t-1}{t} \leq \ln t \leq t-1$

Remarque : une autre démonstration (qui utilise la formule de la moyenne vue en sup)
Pour tout $t \in]0,1[$ la fonction ln est continue sur $[t,1]$, dérivable sur $]t,1[$ donc, d'après le théorème de la moyenne, il existe un réel $c \in]t,1[$ tel que $\ln(1) - \ln t = (1-t)\dfrac{1}{c}$;
Comme $c \in]t,1[$ (avec $0 < t < 1$), on a : $1 \leq \dfrac{1}{c} \leq \dfrac{1}{t}$ donc $\dfrac{t-1}{t} \leq \ln t \leq t-1$.

3. Soit $x \in]0,1[$; la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{\ln t}$ est continue sur $]0,x[$ donc localement intégrable, et elle se prolonge par continuité en 0 car $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{\ln t} = 0$, ainsi $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\ln t}\mathrm{d}t$ converge.
On effectue le changement de variable $u = t^2$, bijectif et de classe C^1 sur $[0,x], \forall x \in]0,1[$:
$\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\ln t}\mathrm{d}t = \int_0^{x^2} \frac{\mathrm{d}u}{2\ln(\sqrt{u})} = \int_0^{x^2} \frac{\mathrm{d}u}{\ln u}$
On peut remarquer à ce stade que le théorème de changement de variable assure la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$, pour $x \in]0,1[$.

4. Soit $x \in]0,1[$; on note $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\mathrm{d}t$. Les convergences ayant été établies précédemment,on a :
$I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{\ln t}\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{1}{\ln t}\mathrm{d}t = \int_0^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} - \int_0^x \frac{1}{\ln t}\mathrm{d}t = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$

D'après la question **2.**, $\forall t \in]0,1[, \dfrac{t-1}{t} \leq \ln t \leq t-1 < 0$ donc $\dfrac{t}{t-1} \geq \dfrac{1}{\ln t} \geq \dfrac{1}{t-1}$.
Par ailleurs, $\forall x \in]0,1[, x > x^2$. La positivité de l'intégrale donne :
$\displaystyle\int_{x^2}^x \frac{t}{t-1}\mathrm{d}t \geq \int_{x^2}^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \geq \int_{x^2}^x \frac{\mathrm{d}t}{t-1}$, puis $[t + \ln|t-1|]_x^{x^2} \leq I(x) \leq [\ln|t-1|]_x^{x^2}$
d'où : $x^2 + \ln\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right) - x \leq I(x) \leq \ln\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)$.
Finalement, on a :

$$x^2 - x + \ln(x+1) \leq I(x) \leq \ln(x+1)$$

Pour conclure, on applique le théorème des gendarmes à l'encadrement précédent et l'on obtient :

$$I = \lim_{x\to 1} I(x) = \ln 2$$

Exercice 2

1. a. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, en notant $a_n = \dfrac{1}{n(n+2)} > 0$, on a : $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \underset{+\infty}{\sim} 1$.
Le critère de d'Alembert pour les séries entières donne donc un rayon de convergence $R = 1$.

b. $\left|\dfrac{(-1)^n}{n(n+2)}\right| = a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$. Donc, par comparaison, $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n a_n$ sont absolument convergentes.

2. a. $\ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$, de rayon de convergence 1.

b. La série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n+2}$ a le même rayon de convergence que la précédente, c'est-à-dire 1 ;
si $x = 0$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+2} = 0$;
si $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+2} = \dfrac{1}{x^2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{n+2}}{n+2} = \dfrac{1}{x^2}(-\ln(1-x) - x - \dfrac{x^2}{2}) = -\dfrac{1}{x^2}\ln(1-x) - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}$.

3. a. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \dfrac{1}{n(n+2)} = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{2(n+2)}$

b. Les séries $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n}$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{(n+2)}$ ont le même rayon de convergence $R = 1$.
Si $x = 0$, $S(x) = 0$;
Si $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$, $S(x) = \dfrac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}\right) - \dfrac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+2}\right) = -\dfrac{1}{2}\ln(1-x) + \dfrac{1}{2x^2}\ln(1-x) + \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{4}$.

c. $-\dfrac{1}{2}\ln(1-x) + \dfrac{1}{2x^2}\ln(1-x) + \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{4} \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{1}{2}(-x) + \dfrac{1}{2x^2}\left(-x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}\right) + \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{4} + o(x) = \dfrac{x}{3} + o(x)$.
On a donc $\lim\limits_{x\to 0} S(x) = S(0)$.

4. a. On a vu dans la question **1.b** que la série entière converge pour $x = 1$ et $x = -1$.
$S(1) = \dfrac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}\right)\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}\right) - \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2}\right)\right)\right)$.
On reconnait une série télescopique ; comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}\right) = 0$ on a : $S(1) = \dfrac{3}{4}$.

$S(-1) = \dfrac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{(-1)^n}{n+2}\right)\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^n\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) - (-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}\right)\right)\right)$.
On reconnait une série télescopique ; comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = 0$ on a : $S(-1) = -\dfrac{1}{4}$.

b. On a montré que pour $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$, $S(x) = -\dfrac{1}{2}\ln(1-x) + \dfrac{1}{2x^2}\ln(1-x) + \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{4}$;
on a bien $\lim\limits_{x\to 1} S(x) = \dfrac{3}{4}$ et $\lim\limits_{x\to -1} S(x) = -\dfrac{1}{4}$.