- CC1-S1 - - 2017-2018 -

– Correction - Analyse –

Exercice 1

1. Soit (u_n) une suite décroissante, de limite nulle. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

a. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0$, et $S_{2n+3} - S_{2n+1} = -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geq 0$, car la suite (u_n) est décroissante.
De plus, $S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

b. En déduire la nature de la série $\sum (-1)^k u_k$.

Les suites partielles (S_{2n}) et (S_{2n+1}) étant adjacentes, elles convergent et ont la même limite. On en déduit que la suite (S_n) converge, donc que la série $\sum (-1)^k u_k$ converge.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \mathrm{d}x$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0,1], 0 \leq \dfrac{x^n}{1+x} \leq x^n$; donc, par positivité de l'intégrale :
$0 \leq I_n \leq \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{d}x$, d'où : $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n + I_{n+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $I_n + I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} \mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$.

c. Déduire de ce qui précède la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$.

La suite $\left(\dfrac{1}{k}\right)_{k\geq 1}$ est strictement décroissante, de limite nulle.

D'après la question 1c, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$ converge.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a, par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1}(I_{k+1} + I_k = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} I_{k+1} - (-1)^k I_k = (-1)^n I_n - I_0.$$

D'après la question 2.b, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
Le théorème d'encadrement donne donc : $\displaystyle\lim_{n\to\to+\infty} I_n = 0$.

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -I_0 = -\int_0^1 \frac{1}{1+t} \mathrm{d}t = -\ln 2$.

Exercice 2

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On considère l'intégrale suivante :

$$I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} \mathrm{d}t$$

1. Calculer $I(x)$.

Pour $t \in [1, x]$, on pose $u(t) = \ln\, t$ et $v(t) = -\dfrac{1}{1+t}$.

u et v sont de classe C^1 sur $[1, x]$. Le théorème d'intégration par parties donne :

$$I(x) = \left[-\frac{\ln\, t}{1+t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)} = -\frac{\ln\, x}{1+x} + \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right) \mathrm{d}t = -\frac{\ln\, x}{1+x} + \left[\ln\left(\frac{t}{1+t}\right)\right]_1^x$$

$$= -\frac{\ln\, x}{1+x} + \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + \ln\, 2.$$

2. Déterminer les limites de $I(x)$ en 0 et en $+\infty$.

On écrit : $I(x) = -\dfrac{x \ln\, x}{1+x} - \ln(1+x) + \ln\, 2$; on a, par croissances comparées : $\lim\limits_{x \to 0} I(x) = \ln\, 2$.

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln\, x}{1+x} = 0$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{1+x} = 1$; on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} I(x) = \ln\, 2$.

3. A l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, montrer que $I(x) - I\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

Avec le changement $u = \dfrac{1}{t}$, on a : $\mathrm{d}t = -\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2}$; on obtient :

$I(x) = \displaystyle\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{-\ln\, u}{\left(1+\frac{1}{u}\right)^2} \times \frac{-\mathrm{d}u}{u^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln\, u}{(1+u)^2} \mathrm{d}u = I\left(\frac{1}{x}\right)$, d'où le résultat.

Exercice 3

On considère la suite de terme général $u_n = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Donner un équivalent simple de $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ et de $w_n = \ln((n+1)u_{n+1}) - \ln(nu_n)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{2^2(n+1)^2} = \dfrac{2n+1}{2(n+1)}$. On a donc :

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(2n\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\right) - \ln\left(2n(\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}.$$

De plus, $\dfrac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n} = \dfrac{2(n+1)^2(2n+1)}{2^2 n(n+1)^2} = 1 + \dfrac{1}{2n}$. On a donc :

$$\ln\left(\frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

2. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, et que $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n = +\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par télescopage, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_1)$.

D'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{k \geq 1} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et $\displaystyle\sum_{k \geq 1} \frac{-1}{2n}$ sont de même nature.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{2n} = -\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(u_{n+1}) = -\infty$, et par suite que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Le même raisonnement donne : $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)\ln(u_{n+1}) = +\infty$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n = +\infty$.

3. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} u_n$.

D'après la question précédente, pour n assez grand, $\dfrac{1}{n} \leq u_n$.

La série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ étant divergente, par comparaison de séries positives, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n \geq 1} u_n$ est divergente.