⋆ Spé - St Joseph/ICAM Toulouse ⋆

Math. - CC 2 - S1 - Analyse

vendredi 24 novembre 2017 - Durée 1 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1

On considère la série entière réelle

$$\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$$

1. Déterminer son rayon de convergence R.

2. Calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.

Exercice 2

On considère la série entière réelle

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$$

1. Déterminer son rayon de convergence R. On note $f(x)$ sa somme dans l'intervalle ouvert de convergence.

2. Montrer que la fonction f est solution d'une équation différentielle du $3^{\text{ème}}$ ordre, homogène, à coefficients constants.

3. Déterminer $f(0), f'(0)$ et $f''(0)$.

Exercice 3

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence 1. On pose :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{et} \quad t_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k$$

1. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum s_n x^n$.

a. A l'aide d'un produit de Cauchy, montrer que $R \geq 1$.

b. En remarquant que

$$\forall n \geq 1,\ a_n = s_n - s_{n-1}$$

justifier que $R \leq 1$.

2. Exprimer la somme de la série entière $\sum s_n x^n$ à l'aide de $f(x)$, pour $x \in]-1,1[$.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum t_n x^n$.

Fin de l'énoncé d'analyse