# - CC2-S1 - - 2017-2018 -

## – Correction - Analyse –

### Exercice 1

On considère la série entière réelle

$$\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$$

**1.** Déterminer son rayon de convergence $R$.

$\forall n \geq 2,\ \forall x \neq 0, \left|\dfrac{n(n-1)}{n(n+1)}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

La règle de D'Alembert donne le rayon de convergence égal à 1.

**2.** Calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.

$\forall x \in ]-1,1[, \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{x^n}{n-1} - \frac{x^n}{n}\right) = x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$ (toutes les séries entières ont le même rayon de convergence 1).

Enfin, comme $\forall x \in ]-1,1[, \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x)$, on peut conclure que

$$\forall x \in ]-1,1[, \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n-1)} = (1-x)\ln(1-x) + x$$

---

### Exercice 2

On considère la série entière réelle

$$\sum_{n\geq 0}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$$

**1.** Déterminer son rayon de convergence $R$. On note $f(x)$ sa somme dans l'intervalle ouvert de convergence.

$\forall x \neq 0, \left|\dfrac{x^{3n+3}}{(3n+3)!} \times \dfrac{(3n)!}{x^{3n}}\right| = \left|\dfrac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}x^3\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Le critère de D'Alembert, donne la série numérique $\displaystyle\sum \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ absolument convergente quel que soit $x$.

Le rayon de convergence de la série entière est donc égal à $+\infty$.

**2.** Montrer que la fonction $f$ est solution d'une équation différentielle du $3^{\text{ème}}$ ordre, homogène, à coefficients constants.

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$. $f$ est alors $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence, à savoir $\mathbb{R}$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$, puis $f''(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$, et enfin $f^{(3)}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n-3}}{(3n-3)!} = f(x)$.

$f$ est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y^{(3)} - y = 0$.

**3.** Déterminer $f(0), f'(0)$ et $f''(0)$.

On sait de plus que, si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Ici, $a_0 = 1,\ a_1 = a_2 = 0$ donc $f(0) = 1$ et $f'(0) = f''(0) = 0$.

## Exercice 3

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence 1. On pose :

$$\forall x \in ]-1,1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{et} \quad t_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k$$

**1.** Soit $R$ le rayon de convergence de la série entière $\sum s_n x^n$.

**a.** A l'aide d'un produit de Cauchy, montrer que $R \geq 1$.

$\sum s_n x^n = \sum \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) x^n = \sum \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \times 1\right) x^n$ donc $\sum s_n x^n$ est le produit de Cauchy de $\sum x^n$ et de $\sum a_n x^n$, toutes deux de rayon de convergence 1. On en déduit que le rayon de convergence $R$ de $\sum s_n x^n$ est tel que $R \geq \min(1,1)$ et donc $R \geq 1$.

**b.** En remarquant que

$$\forall n \geq 1,\ a_n = s_n - s_{n-1}$$

justifier que $R \leq 1$.

$\forall x \in ]-1;1[, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = s_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(s_n - s_{n-1})x^n = s_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} s_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} s_{n-1} x^n$ (puisque $R \geq 1$).

Donc si $x \in ]-R;R[, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge absolument et ainsi $R \leq 1$. On conclut que $R = 1$.

**2.** Exprimer la somme de la série entière $\sum s_n x^n$ à l'aide de $f(x)$, pour $x \in ]-1,1[$.

Des questions précédentes, on conclut que : $\forall x \in ]-1;1[, \sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{f(x)}{1-x}$.

**3.** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum t_n x^n$.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum t_n x^n$ est 1 puisque c'est celui de $\sum \dfrac{s_n}{n+1} x^{n+1}$, qui est égal au rayon de $\sum s_n x^n$ (par primitivation).