⋆ Spé - St Joseph/ICAM Toulouse ⋆

Math. - CC 2 - S2 - Analyse - Probabilités

vendredi 30 mars 2018 - Durée 2h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1

1. On considère la fonction f définie sur $]-1,1[\times[0,\pi]$ par :

$$f(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t} & \text{si } t\neq\dfrac{\pi}{2}\\ x & \text{si } t=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

a. Montrer que f est continue sur $]-1,1[\times[0,\pi]$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1,1[\times[0,\pi]$.

2. On considère l'intégrale

$$F(x)=\int_0^{\pi} f(x,t)\mathrm{d}t$$

a. Montrer que $F(x)$ est définie pour $x\in]-1,1[$.

b. Montre que F est de classe C^1 sur $]-1,1[$.

c. Montrer que pour $t\in[0,\pi[, \cos t=\dfrac{1-\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}$.

d. En déduire que pour tout $x\in]-1,1[$, on a :

$$F'(x)=\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}.$$

e. En déduire l'expression de $F(x)$ pour $x\in]-1,1[$.

Exercice 2

Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes, en utilisant les changements de variables proposés :

1.

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=f \qquad \begin{cases}u=x\\ v=y-x\end{cases}$$

2.

$$y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}=f \qquad \begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$$

T.S.V.P.

Exercice 3

On dispose d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir Face est $p \in]0,1[$. On note $q = 1-p$.

1. soit $n \in \mathbb{N}^*$. O, effectue n lancers indépendants de cette pièce, et on note :

$$F_k = \text{" on obtient Face au } k^{\text{ème}} \text{ lancer"}$$

On note également

$$A_n = \text{" au cours des } n \text{ lancers, Face n'est jamais suivi de Pile"}$$

a. Exprimer l'événement A_n en fonction des événements $F_k, k \in [\![1, n]\!]$.

b. En déduire $\mathbb{P}(A_n)$. (On distinguera deux cas.)

2. Si l'on admet que l'on peut lancer indéfiniment la pièce, est-il possible que Face ne soit jamais suivi de Pile ?

Exercice 4

Des joueurs en nombre illimité, notés $J_1, \dots, J_n, \dots$ s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face.

Ils jouent successivement et dans l'ordre des indices, et le jeu se termine dès que l'un des joueurs obtient Pile.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, J_n obtient Pile avec la probabilité $p_n \in]0,1[$, et on note $q_n = 1 - p_n$.
On notera par convention $q_0 = 1$.
Enfin, on définit pour tout entier n non nul l'événement $G_n =$ " le joueur J_n gagne".

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(G_n) = q_0 q_1 \cdots q_{n-1} - q_0 q_1 \cdots q_{n-1} q_n$$

2. On définit la suite (Q_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}, Q_n = q_0 q_1 \cdots q_n$$

Montrer que la suite (Q_n) converge vers un réel qu'on notera a, avec $0 \leq a \leq 1$.

3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(G_k) = 1 - Q_n$$

et en déduire que :
– si $a \neq 0$, le jeu a une probabilité non nulle de ne pas se terminer,
– si $a = 0$, le jeu se termine avec la probabilité 1.

4. Quelle est la probabilité que le jeu se termine dans les deux cas suivants :
– $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ p_n = p$ avec $0 < p < 1$.
– $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ p_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

Fin de l'énoncé