- CC1-S1 - - 2019-2020 -

– Correction - Analyse –

Les deux parties sont indépendantes.

PARTIE I

L'objectif de cette partie est de calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$.

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi]$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\,\mathrm{d}t=0$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\,\mathrm{d}t$. La fonction intégrée est continue sur $[0,\pi]$.

Pour $t\in[0,\pi]$, on note $g(t)=-\dfrac{2}{2n+1}\cos\left(\dfrac{2n+1}{2}t\right)$. f et g sont de classe C^1 sur $[0,\pi]$ donc le théorème d'intégration par parties donne :

$I_n=\left[-\dfrac{2}{2n+1}\cos\left(\dfrac{2n+1}{2}t\right)f(t)\right]_0^{\pi}+\dfrac{2}{2n+1}\displaystyle\int_0^{\pi} f'(t)\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t=\dfrac{2f(0)}{2n+1}+\dfrac{2}{2n+1}\displaystyle\int_0^{\pi} f('t)\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t.$

Pour $t\in[0,\pi]$, la fonction f' étant continue, on a : $\left|f('t)\cos\left(\dfrac{2n+1}{2}t\right)\right|\leq|f'(t)|\leq\displaystyle\sup_{t\in[0,\pi]}|f'(t)|$, donc

$|I_n|\leq\dfrac{2}{2n+1}\left(|f(0)|+\pi\displaystyle\sup_{t\in[0,\pi]}|f'(t)|\right)$. Le théorème d'encadrement donne : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n=0$.

2. Montrer que pour $n\in\mathbb{N}^*$, et $t\in]0,\pi]$, on a :

$$C_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)=\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Rappels : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\cos(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}$, $\sin(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}}{2i}$; $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2, 2\sin a\cos b=\sin(a+b)+\sin(a-b)$.

Soient $n\in\mathbb{N}^*$, et $t\in]0,\pi]$. On a :

$C_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\mathrm{e}^{it})^k+(\mathrm{e}^{-it})^k\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{it}\dfrac{1-\mathrm{e}^{int}}{1-\mathrm{e}^{it}}+\mathrm{e}^{-it}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-int}}{1-\mathrm{e}^{-it}}\right)$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{it(1+\frac{n}{2}-\frac{1}{2})}\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{int}{2}}-\mathrm{e}^{\frac{int}{2}}}{\mathrm{e}^{-\frac{it}{2}}-\mathrm{e}^{\frac{it}{2}}}+\mathrm{e}^{-it(1+\frac{n}{2}-\frac{1}{2})}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{int}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{int}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{it}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{it}{2}}}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(2\cos\left(\dfrac{n+1}{2}t\right)\dfrac{\sin\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)-\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)=\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$

3. Montrer que l'on a pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{\pi}(t^2-2\pi t)\cos(kt)\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{k^2}$$

Pour $t\in[0,\pi]$, on pose $u_1(t)=t^2-2\pi t$ et $v_1(t)=\dfrac{1}{k}\sin(kt)$; u_1 et v_1 sont de classe C^1 sur $[0,\pi]$, et le théorème d'intégration par parties donne :

$\displaystyle\int_0^{\pi}(t^2-2\pi t)\cos(kt)\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{k}(t^2-2\pi t)\sin(kt)\right]_0^{\pi}-\frac{1}{k}\int_0^{\pi}(2t-2\pi)\sin(kt)\mathrm{d}t=-\frac{1}{k}\int_0^{\pi}(2t-2\pi)\sin(kt)\mathrm{d}t.$

Pour $t\in[0,\pi]$, on pose $u_2(t)=2t-2\pi$ et $v_2(t)=-\dfrac{1}{k}\cos(kt)$; u_2 et v_2 sont de classe C^1 sur $[0,\pi]$, et le théorème d'intégration par parties donne :

$\displaystyle\int_0^{\pi}(2t-2\pi)\sin(kt)\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{k}(2t-2\pi)\cos(kt)\right]_0^{\pi}+\frac{2}{k}\int_0^{\pi}\cos(kt)\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{k}.$

Finalement, $\displaystyle\int_0^{\pi}(t^2-2\pi t)\cos(kt)\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{k^2}.$

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(t^2-2\pi t)C_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\frac{\pi^2}{6}$$

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(t^2-2\pi t)C_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}(t^2-2\pi t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}(t^2-2\pi t)\cos(kt)\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{t^3}{3}-\pi t^2\right]_0^{\pi}+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\pi}{k^2}$
$= -\frac{\pi^2}{6}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

5. Déduire de ce qui précède la somme de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$.

Pour $t \in]0,\pi]$, on note $f(t) = \frac{t^2-2\pi t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.
On a : $f(t) = -4\pi + 2t + o_{t\to 0}(t)$ donc f se prolonge en 0 en une fonction de classe C^1.
Les résultats des questions **1** et **2**, donnent :
$\int_0^{\pi}(t^2-2\pi t)C_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On déduit de la question précédente que $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

PARTIE II
L'objectif de cette partie est de montrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

1. Prouver la convergence de l'intégrale.
$t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2-1}$ est continue sur $]0,1[$ donc localement intégrale. Elle est également positive.
En 0 : $\frac{\ln(t)}{t^2-1} \sim -\ln(t)$. $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ est une intégrale de référence convergente, donc par comparaison de fonctions positives, $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t$ converge.
En 1 : $\frac{\ln(t)}{t^2-1} = \frac{\ln(t)}{(t-1)(t+1)} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$. La fonction se prolonge par continuité en 1, l'intégrale est donc faussement impropre sur cette borne.
En conclusion, $\int_1^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t$ est convergente.

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'intégrale $I_k = \int_0^1 t^k\ln(t)\mathrm{d}t$ converge, et la calculer

Soient $k\in\mathbb{N}$ et $x>0$. Pour $t\in[x,1]$, on pose $u(t)=\ln(t)$ et $v(t) = \frac{t^{k+1}}{k+1}$.
u et v sont de classe C^1 sir $[x,1]$, et le théorème d'intégration par parties donne :
$I_k = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\ln(t)\right]_x^1 - \int_x^1\frac{t^k}{k+1} = -\frac{x^{k+1}}{k+1}\ln(x) - \frac{1}{(k+1)^2}+\frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{(k+1)^2}$, par croissances comparées.
On a ainsi établi la convergence de I_k et sa valeur.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1\frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t - \int_0^1\frac{t^{2n+2}\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t$$

D'après la question précédente, on a :
$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2} = -\sum_{k=0}^{n} I_{2k} = -\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 t^{2k}\ln(t)\mathrm{d}t = -\int_0^1\sum_{k=0}^{n}\left(t^2\right)^k\ln(t)\mathrm{d}t = -\int_0^1\frac{1-(t^2)^{n+1}}{1-t^2}\ln(t)\mathrm{d}t.$
Comme on a montré la convergence de $\int_0^1\frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t$, on en déduit le résultat attendu.

4. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^2\ln(t)}{t^2-1}$ est bornée sur $]0,1[$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{t^2\ln(t)}{t^2-1}$ est continue sur $]0,1[$, et se prolonge par continuité en 0 (par croissances comparées) et en 1 (avec $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{\ln(t)}{t-1}=1$).
On en déduit qu'elle est bornée sur le compact $[0,1]$.

5. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+2}\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t=0$, puis la relation attendue.

Soit $M\in\mathbb{R}^+$ un majorant de $t\mapsto \dfrac{t^2\ln(t)}{t^2-1}$ sur $]0,1[$ (qui est positive sur cet intervalle).
Par positivité de l'intégrale, on a : $0\leq \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+2}\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t \leq M\int_0^1 t^{2n}\mathrm{d}t$, donc $0\leq \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+2}\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t\leq \frac{M}{2n+1}$.
Le théorème d'encadrement donne $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+2}\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t=0$ et par suite, $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$.

6. En utilisant le résultat démontré en partie I, calculer $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(t)}{1-t^2}\mathrm{d}t$.

On a montré dans la première partie que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

En admettant que le regroupement de termes est possible, on en déduit que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}$,
donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{4}\times\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{8}$.
Finalement, $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(t)}{1-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{8}$.