⋆ Spé - St Joseph/ICAM Toulouse ⋆

Math. - CC 1 - S2 - Algèbre - Géométrie

vendredi 28 février 2020 - Durée 2 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

EXERCICE 1

On considère la matrice
$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice A est orthogonale.

2. Sans calculer le polynôme caractéristique, ni le déterminant, justifier que A est diagonalisable, donner ses valeurs propres et leurs multiplicités.

3. Retrouver les résultats précédents en calculant le déterminant de A, préciser la nature de l'endomorphisme canoniquement associé, ainsi que ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la conique $\mathscr{C}$ d'équation :
$$4x^2 + y^2 - 4xy - 18x + 4y + 10 = 0$$
Donner l'équation réduite de $\mathscr{C}$ et la tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 3

Etudier et tracer l'arc paramétré (I, φ) où $I = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et $\varphi : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{1-t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1-t^2} \end{cases}$

EXERCICE 4

On considère le cercle unité $\mathscr{C}$, et un point F situé à l'extérieur du disque. Déterminer un paramétrage de l'enveloppe de la médiatrice du segment $[MF]$ lorsque M décrit $\mathscr{C}$.

EXERCICE 5

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice orthogonale de $O_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 2)$. On note $S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$.

1.a. Justifier que $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, |a_{ij}| \leq 1$.

b. En déduire une majoration de $|S|$.

2. On note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, f l'endomorphisme canoniquement associé à A et u le vecteur $(1, \cdots, 1) \in \mathbb{R}^n$.

a. Exprimer $(f(u)|u)$ à l'aide de S.

b. En déduire que $|S| \leq n$.

c. Peut-on trouver une meilleure majoration de $|S|$?

Fin de l'énoncé