- CC1-S2 - - 2019-2020 -

– CORRECTION - ALGÈBRE - GÉOMÉTRIE –

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

EXERCICE 1

On considère la matrice

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice A est orthogonale.
${}^tAA = \mathrm{I}_3$ donc A est une matrice orthogonale.

2. Sans calculer le polynôme caractéristique, ni le déterminant, justifier que A est diagonalisable, donner ses valeurs propres et leurs multiplicités.
A est une matrice symétrique elle est donc diagonalisable. Comme elle est orthogonale, ses valeurs propres sont dans $\{-1, 1\}$. Comme sa trace (somme de ses valeurs propres au nombre de leurs multiplicités) vaut 1, on en déduit que A a pour valeurs propres 1, de multiplicité 2, et -1 de multiplicité 1.

3. Retrouver les résultats précédents en calculant le déterminant de A, préciser la nature de l'endomorphisme canoniquement associé, ainsi que ses éléments caractéristiques.
$\det(A) = -1$ donc A est la matrice de la composée d'une rotation et d'une réflexion. Comme sa trace vaut 1, c'est la matrice d'une réflexion par rapport au plan $\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_3)$, qui a pour équation : $2x - 2y + z = 0$.

EXERCICE 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la conique $\mathscr{C}$ d'équation :

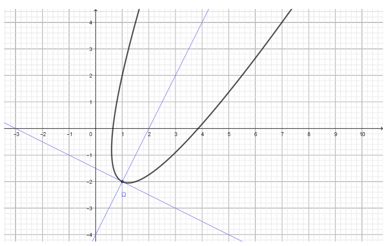
$$4x^2 + y^2 - 4xy - 18x + 4y + 10 = 0$$

Donner l'équation réduite de $\mathscr{C}$ et la tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $H = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. $\det(H) = 0$ donc $\mathscr{C}$ est du genre parabole.

Soient $\vec{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$, $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ des vecteurs propres de H (directement orthogonaux), et Ω de coordonnées $\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{-3}{\sqrt{5}}\right)$ dans la base $(O, \vec{u}, \vec{v})$, et donc $(1, -2)$ dans le repère initial.

L'équation de $\mathscr{C}$ dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est : $X^2 = \frac{2}{\sqrt{5}}Y$. Sa représentation graphique est :



EXERCICE 3

Etudier et tracer l'arc paramétré (I,φ) où $I=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ et $\varphi : t\mapsto \begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{1-t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1-t^2} \end{cases}$

x est une fonction paire, et y une fonction impaire. On peut donc étudier la courbe sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$, le reste s'obtenant par une symétrie d'axe (Ox).

On a : $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{2t}{(1-t^2)^2} \\ y'(t) = \dfrac{t^2(3-t^2)}{(1-t^2)^2} \end{cases}$. On en déduit le tableau de variations suivant :

t	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
x	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-3/2$	↗	-1
$y'(t)$	0	-	‖	-	0	$+$	
y	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-3\sqrt{3}/2$	↘	$-\infty$

Etude locale :

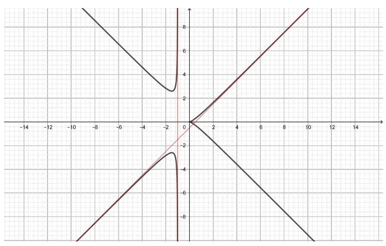
$\rightsquigarrow$ En $t=\sqrt{3}$, on a une tangente horizontale.

$\rightsquigarrow$ En $t=0$, on a un point singulier. $\begin{cases} x(t) = t^2 + o_{t\to 0}(t^3) \\ y(t) = t^3 + o_{t\to 0}(t^3) \end{cases}$.
On en déduit qu'il s'agit d'un rebroussement de première espèce.

$\rightsquigarrow$ En $+\infty$, la courbe admet une asymptote d'équation $x=-1$;

$\rightsquigarrow$ En 1 : $\dfrac{y(t)}{x(t)} = t$, et $y(t)-x(t) = \dfrac{-t^2}{1+t} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} \dfrac{-1}{2}$.
On en déduit que la courbe admet pour asymptote la droite d'équation : $y = x - \dfrac{1}{2}$.

On obtient la courbe suivante :



EXERCICE 4

On considère le cercle unité $\mathscr{C}$, et un point F situé à l'extérieur du disque. Déterminer un paramétrage de l'enveloppe des médiatrices desu segments $[MF]$ lorsque M décrit $\mathscr{C}$.

On munit le plan d'un repère orthonormé. On note (a, b) les coordonnées de F dans ce repère.
Un point de $M(t) \in \mathscr{C}$ a pour coordonnées $(\cos t, \sin t)$ où $t \in [0, 2\pi[$.
Les coordonnées (x, y) d'un point de la médiatrice de $[M(t)F]$ vérifient :
$(x - x(t))^2 + (y - y(t))^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$ c'est-à-dire que la médiatrice de $[M(t)F]$ a pour équation : $(a - \cos t)x + (b - \sin t)y = \dfrac{a^2 + b^2 - 1}{2}$.
Un point M de coordonnées (x, y) appartient à l'enveloppe de cette famille de droites si et seulement si :

$$\begin{cases} (a - \cos t)x + (b - \sin t)y = \dfrac{a^2 + b^2 - 1}{2} \\ \sin t\, x - \cos t\, y = 0 \end{cases}$$

On en déduit une représentation paramétrique de l'enveloppe définie pour $t \in \mathbb{R}$ tel que $1 - (a \cos t + b \sin t) \neq 0$ par :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{\cos t\,(1 - (a^2 + b^2))}{2(1 - (a \cos t + b \sin t))} \\ y(t) = \dfrac{\sin t\,(1 - (a^2 + b^2))}{2(1 - (a \cos t + b \sin t))} \end{cases}$$

EXERCICE 5

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice orthogonale de $O_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 2)$. On note $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$.

1.a. Justifier que $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, |a_{ij}| \leq 1$.

La matrice est orthogonale, donc pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$, d'où pour tout $(i, j) \in \left([\![1, n]\!]\right)^2, |a_{ij}| \leq 1$.

b. En déduire une majoration de $|S|$.

On déduit de la question précédente que $|S| \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq n^2$.

2. On note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, f l'endomorphisme canoniquement associé à A et u le vecteur $(1, \cdots, 1) \in \mathbb{R}^n$.

a. Exprimer $(f(u)|u)$ à l'aide de S.

On note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ le vecteur colonne des coordonnées de u. On a : $(f(u)|u) =^t UAU = S$.

b. En déduire que $|S| \leq n$.
D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a : $|f(u)|u)| \leq \|f(u)\|\,\|u\|$; f étant une isométrie, on a $\|f(u)\| = \|u\| = \sqrt{n}$. Ainsi, $|S| = |(f(u)|u)| \leq n$.

c. Peut-on trouver une meilleure majoration de $|S|$?
Pour $A = \mathrm{I}_n$, on a $S = n$. On ne peut donc pas améliorer la majoration.