- CC2-S1 - - 2019-2020 -

— Correction - Analyse —

1. a. Démontrer que le rayon de convergence de $\sum z^n$ vaut 1.

Il s'agit de la série géométrique de raison z, et cette dernière converge si, et seulement si, $|z| < 1$.
Par conséquent, son rayon de convergence est 1.
On peut aussi appliquer le critère de D'Alembert ou le lemme d'Abel.

b. Démontrer que le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{n}$ vaut 1.

D'après le théorème de dérivation d'une somme de série entière, $\sum \frac{z^n}{n}$ et $\sum n \times \frac{z^n}{n} = \sum z^n$ ont le même rayon de convergence. Par suite, le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{n}$ est 1.
On peut aussi appliquer le critère de D'Alembert.

c. Pour tout $x \in]-1, 1[$, exprimer

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{et} \quad S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

en fonction de x.

$\forall x \in]-1, 1[$, $S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ et $S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

2. a. Justifier que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{\ln(1-x)}{x-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$$

$\forall x \in]-1, 1[$, $\sum x^n$ et $\sum \frac{x^n}{n}$ convergent absolument donc la série produit de Cauchy de ces deux dernières converge absolument et donc, a pour rayon de convergence $R \geq 1$. De plus, $\forall x \in]-1, 1[$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} x^{n-k}\frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\right)x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}\right)x^n$$

On a donc bien, compte tenu de la question **1.c)** :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{\ln(1-x)}{x-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$$

b. Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$$

De la question précédente, le rayon de convergence R de la série entière $\sum \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$ vérifie $R \geq 1$. De plus, $\sum \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) 1^n = \sum \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$ diverge grossièrement, donc $R \leq 1$.
Par conséquent, $R = 1$.
On peut aussi, encore une fois, appliquer le critère de D'Alembert.

3. On note pour $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$$

a. Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f(x) - xf(x) = S_2(x)$$

$\forall x \in]-1,1[$ on a :

$f(x) - xf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}\right) x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}\right) x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\right) x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}\right) x^{n+1}$

donc $\forall x \in]-1,1[,\ f(x) - xf(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = S_2(x)$.

b. Retrouver le résultat de la question **2.a)**

On a, pour $x \in]-1,1[$, $f(x) - xf(x) = S_2(x) = -\ln(1-x)$, c'est à dire $(1-x)f(x) = -\ln(1-x)$ ou encore $f(x) = \frac{-\ln(1-x)}{1-x} = \frac{\ln(1-x)}{x-1}$, ce qui est le résultat attendu.

4. Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

On note alors R_a et R_b les rayons de convergence respectifs de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

a. Montrer que

$$R_b \geq \min(R_a, 1)$$

$\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1 et $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R_a, donc elles convergent absolument et simultanément pour $|z| < \min(R_a, 1)$. Par conséquent la série produit de Cauchy de ces deux dernières converge absolument pour $|z| < \min(R_a, 1)$, et donc, a pour rayon de convergence $R \geq \min(R_a, 1)$.

De plus, $\forall |z| < \min(R_a, 1)$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} 1 \times a_k\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

On peut conclure que $R = R_b$ et qu'on a bien $R_b \geq \min(R_a, 1)$.

b. Montrer que si (a_n) converge vers 0 et $\sum a_n$ diverge alors $R_a = 1$, puis $R_b = 1$.

Puisque (a_n) converge vers 0, on en déduit que $(a_n 1^n)$ est bornée et, par le lemme d'Abel, $R_a \geq 1$. Mais $\sum a_n = \sum a_n 1^n$ diverge donc $R_a \leq 1$. On conclut que $R_a = 1$.

D'après **4.a)**, $R_b \geq 1$ mais $(b_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)$ diverge donc $\sum b_n = \sum b_n 1^n$ diverge grossièrement ; par conséquent $R_b \leq 1$, puis $R_b = 1$. On peut toujours et encore appliquer le critère de D'Alembert ou remarquer que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq b_n$ et donc $R_b \leq R_a$.

5. On pose, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où (a_n) est une suite de réels strictement positifs telle que (a_n) converge vers 0 et $\sum a_n$ diverge.
Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \frac{g(x)}{1-x}$$

$R_a = R_b = 1$ donc $\forall x \in]-1,1[$ on a :

$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n - x\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} b_{n-1} x^n = b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$

donc $\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n - x\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = g(x)$. Soit encore $\forall x \in]-1,1[,\ (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = g(x)$ puis $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \frac{g(x)}{1-x}$. On peut aussi utiliser un produit de Cauchy.