⋆ Spé - St Joseph/ICAM Toulouse ⋆

Math. - CC 3 - S1 - Analyse

vendredi 13 décembre 2019 - Durée 1 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2(1-x)y'' - x(x+1)y' + y = 2x^3 \quad (E)$$

PARTIE I

Dans cette partie on cherche les solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$x^2(1-x)y'' - x(x+1)y' + y = 0 \quad (H)$$

On considère une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence $r > 0$. On définit la fonction $f :]-r, r[\longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

1. Justifier que la fonction f est de classe C^2 et que les fonctions f' et f'' sont développables en série entière. Exprimer avec la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les développements respectifs des fonctions f' et f'' en précisant leur rayon de convergence.

2. Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\geq 2}$ de nombres réels non nuls telle que pour tout $x \in]-r, r[$ on a :

$$x^2(1-x)f''(x) - x(x+1)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n (a_n - a_{n-1}) x^n.$$

3. Montrer que f est solution de (H) sur l'intervalle $]-r, r[$ si et seulement si, $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. En déduire que si f est solution de (H) sur $]-r, r[$, alors $r \geq 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}$$

5. Réciproquement, montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction

$$g :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\lambda x}{1-x}$$

est une solution de (H) sur $]-1, 1[$, développable en série entière.

PARTIE II

Soit $y :]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On définit la fonction $z :]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) y(x)$$

1. Justifier que z est de classe C^2 sur $]0, 1[$, puis exprimer z' et z'' avec y, y' et y''.

2. Montrer que y est solution de (E) sur $]0, 1[$ si, et seulement si z est solution sur $]0, 1($ de l'équation différentielle :

$$xz'' + z' = 2x \quad (E_1)$$

3. Montrer que si z est solution de (E_1) sur $]0, 1[$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in]0, 1[, \quad z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x$$

4. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $]0, 1[$.

Fin de l'énoncé d'analyse