- CC3-S1 - - 2019-2020 -

– Correction - Analyse –

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2(1-x)y'' - x(x+1)y' + y = 2x^3 \quad (E)$$

PARTIE I

Dans cette partie on cherche les solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$x^2(1-x)y'' - x(x+1)y' + y = 0 \quad (H)$$

On considère une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence $r > 0$. On définit la fonction $f :]-r, r[\longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

1. Justifier que la fonction f est de classe C^2 et que les fonctions f' et f'' sont développables en série entière. Exprimer avec la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les développements respectifs des fonctions f' et f'' en précisant leur rayon de convergence.

f est la somme d'une série entière de rayon de convergence $r > 0$. Elle est donc de classe C^∞ sur $]-r, r[$ et en particulier de classe C^2, et le théorème de dérivation des séries entières donne f' et f'' développables en séries entières, avec même rayon de convergence r, et pour tout $x \in]-r, r[$:

$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.

2. Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\geq 2}$ de nombres réels non nuls telle que pour tout $x \in]-r, r[$ on a :

$$x^2(1-x)f''(x) - x(x+1)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n (a_n - a_{n-1}) x^n.$$

D'après la question précédente, pour tout $x \in]-r, r[$, on a :

$x^2(1-x)f''(x) - x(x+1)f'(x) + f(x) = x^2(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x(x+1)\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1) - n + 1) a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1) + n) a_n x^{n+1} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)^2 a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)^2 a_{n-1} x^n$

Les termes d'indice 1 sont nuls dans les deux sommes, on a donc :

$x^2(1-x)f''(x) - x(x+1)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)^2 (a_n - a_{n-1}) x^n$.

3. Montrer que f est solution de (H) sur l'intervalle $]-r, r[$ si et seulement si, $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

f est solution de (H) sur $]-r, r[$ si, et seulement si pour tout $x \in]-r, r[$, on a : $a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)^2 (a_n - a_{n-1}) x^n = 0$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit que $a_0 = 0$ et $\forall n \geq 2, a_n - a_{n-1} = 0$ (car $n - 1 \neq 0$), donc $a_0 = 0$ et $\forall n \geq 1, a_{n+1} = a_n$.

Réciproquement, si $a_0 = 0$ et $\forall n \geq 1, a_{n+1} = a_n$ alors (H) est bien vérifiée.

4. En déduire que si f est solution de (H) sur $]-r, r[$, alors $r \geq 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}$$

Si f est solution de (H) sur $]-r, r[$, alors d'après la question précédente :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in]-r, r[, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x^n$$

Cette série entière a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 (il vaut 1 si $\lambda \neq 0$, et $+\infty$ sinon), et $\forall x \in]-1,1[, f(x) = \lambda \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 1 \right) = \lambda \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right) = \frac{\lambda x}{1-x}$.

5. Réciproquement, montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction

$$g :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\lambda x}{1-x}$$

est une solution de (H) sur $]-1,1[$, développable en série entière.

g est de classe C^∞ sur $]-1,1[$, et pour tout $x \in]-1,1[, g'(x) = \frac{\lambda}{(1-x)^2}$ et $g''(x) = \frac{2\lambda}{(1-x)^3}$.

Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$ on a :

$$x^2(1-x)g''(x) - x(x+1)g'(x) + g(x) = 0$$

donc g est solution de (H) sur $]-1,1[$.

D'autre part, pour tout $x \in]-1,1[, g(x) = \lambda x \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda x^{n+1}$ donc g est développable en série entière.

PARTIE II

Soit $y :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On définit la fonction $z :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall x \in]0,1[, \quad z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1 \right) y(x)$$

1. Justifier que z est de classe C^2 sur $]0,1[$, puis exprimer z' et z'' avec y, y' et y''.
z est de classe C^2 sur $]0,1[$ comme produit de fonctions de classe C^2, et pour tout $x \in]0,1[$, on a :
$z'(x) = -\frac{1}{x^2} y(x) + \left(\frac{1}{x} - 1 \right) y'(x)$, et $z''(x) = \frac{2}{x^3} y(x) - \frac{2}{x^2} y'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1 \right) y''(x)$.

2. Montrer que y est solution de (E) sur $]0,1[$ si, et seulement si z est solution sur $]0,1($ de l'équation différentielle :

$$xz'' + z' = 2x \quad (E_1)$$

z est solution de (E_1) sur $]0,1[$ si, et seulement si pour tout $x \in]0,1[$:
$x \left(\frac{2}{x^3} y(x) - \frac{2}{x^2} y'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1 \right) y''(x) \right) + \left(-\frac{1}{x^2} y(x) + \left(\frac{1}{x} - 1 \right) y'(x) \right) = 2x$ ce qui équivaut à :
$x^2(1-x)y''(x) - x(x+1)y'(x) + y(x) = 2x^3$.
Ainsi, z est solution de (E_1) si, et seulement si y est solution de (E).

3. Montrer que si z est solution de (E_1) sur $]0,1[$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in]0,1[, \quad z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x$$

z est solution de (E_1) si et seulement siz' est solution de (E_2) : $xy' + y = 2x$.

L'équation homogène associée à (E_2) a pour solutions les fonctions $x \mapsto \frac{\lambda}{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et la fonction $x \mapsto x$ est une solution particulière de (E_2).

On en déduit que les solutions de (E_2) sont les fonctions $x \mapsto \frac{\lambda}{x} + x, \lambda \in \mathbb{R}$, donc que z' est de cette forme.

4. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $]0,1[$.

D'après les questions précédentes, y est solution de (E) sur $]0,1[$ si et seulement si $z : x \mapsto \left(\frac{1}{x} - 1 \right) y(x)$ est solution de (E_1) sur $]0,1[$, donc si, et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x$ ce qui équivaut à :

il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]0,1[$, $z(x) = \lambda \ln(x) + \frac{1}{2} x^2 + \mu$.

On en déduit les solutions y de (E) sur $]0,1[$:

$$\forall x \in]0,1[, y(x) = \frac{x}{1-x} \left(\lambda \ln(x) + \frac{1}{2} x^2 + \mu \right) \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$