ES01

Algèbre Durée 3h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

EXERCICE 1

Démontrer, en justifiant, que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On précisera une matrice de passage à **coefficients entiers**, que l'on notera P, et on calculera P^{-1}.

EXERCICE 2

On cherche à calculer

$$I = \mathop{\mathbf{Inf}}_{a,b \in \mathbb{R}} \left\{ \int_0^1 \left(\mathrm{e}^{-t} - at - b \right)^2 \mathrm{d}t \right\}$$

Pour cela, on munit $\mathscr{C}([0\,;\,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que
$$I = d(\phi, F)^2$$
où $d(\phi, F)$ est la distance de ϕ à F, avec ϕ application de $\mathscr{C}([0\,;\,1], \mathbb{R})$ **à préciser** et F sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}([0\,;\,1], \mathbb{R})$ **à préciser également**.
2. Déterminer le projeté orthogonal de ϕ sur F.
3. En déduire I.

EXERCICE 3

Pour tous entiers strictement positifs n et p, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. I_n désigne la matrice identité d'ordre n. Pour une matrice A, on note ${}^tA$ sa matrice transposée et $\mathbf{Tr}(A)$ sa trace.

Partie 1

Dans cette partie, on se fixe un entier $n \geq 1$. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe deux matrices U, V de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et deux réels λ et μ tels que $\lambda\mu \neq 0$ et $\lambda \neq \mu$ vérifiant :

$$A = \lambda U + \mu V \tag{1}$$
$$A^2 = \lambda^2 U + \mu^2 V \tag{2}$$
$$A^3 = \lambda^3 U + \mu^3 V \tag{3}$$

1. Exprimer U et V en fonction de A et A^2.
En déduire que
$$A^3 = (\lambda + \mu)A^2 - \lambda\mu A$$
2. Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$,
$$A^p = \lambda^p U + \mu^p V$$

3. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
Pour $p \in \mathbb{N}$ et $p \geq 2$, on note $f^p = f \circ \cdots \circ f$ la $p^{\text{ème}}$ composée de f.

a) Montrer que
$$\mathbf{Ker}(f) \subset \mathbf{Ker}(f^p)$$

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
$$\lambda\mu f^{p-1}(x) = (\lambda+\mu) f^p(x) - f^{p+1}(x)$$

c) En déduire que
$$\mathbf{Ker}(f^p) \subset \mathbf{Ker}(f)$$

d) Montrer que
$$\mathbf{rg}(A) = \mathbf{rg}(A^p)$$

Partie 2

On a toujours un entier $n \geq 1$. Soit U, V les deux matrices colonnes définies par
$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \textbf{et} \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

On suppose U et V non nulles. Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice définie par :
$$A = aI_n + U\,{}^tV$$

1. Montrer que ${}^tV\,U$ est un réel que l'on exprimera en fonction des coefficients u_i et v_i.

2. Montrer qu'il existe un réel k tel que
$$\left(U\,{}^tV\right)^2 = k\left(U\,{}^tV\right)$$
En déduire qu'il existe deux réels α et β tels que
$$A^2 = \alpha A + \beta I_n$$

3. On note $A = \left(a_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n}$. Donner l'expression de a_{ij} en fonction de a et des coefficients de U et V.
En déduire que
$$\mathbf{Tr}(A) = na + {}^tV\,U$$

4. Exprimer α et β en fonction de a et de $\mathbf{Tr}(A)$.

5. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que λ^2 est une valeur propre de A^2.
En déduire que λ vérifie l'équation
$$\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0$$

6. Montrer que les seules valeurs propres possibles de A sont $\lambda_1 = a$ et $\lambda_2 = \mathbf{Tr}(A) - (n-1)a$.

7. On suppose que $\mathbf{Tr}\left(U\,{}^tV\right) \neq 0$ et on considère les sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 définis par
$$E_i = \left\{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX = \lambda_i X\right\}$$

a) Montrer que
$$E_1 \cap E_2 = \{0\}$$

b) Montrer par analyse-synthèse que, pour tout vecteur colonne X, il existe $X_1 \in E_1$ et $X_2 \in E_2$ tels que $X = X_1 + X_2$.

c) Montrer que la matrice A est diagonalisable.

EXERCICE 1

$\chi_A = (X-3)(X-2)^2$ est scindé sur $\mathbb{R}$ donc A est trigonalisable (au moins) sur $\mathbb{R}$.

On a $E_3(A) = \mathbf{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $E_2(A) = \mathbf{Vect}\left(\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}\right)$; ce qui fait que A n'est pas diagonalisable.

On cherche alors $P = \begin{pmatrix}1 & 4 & a\\1 & 3 & b\\1 & 4 & c\end{pmatrix}$ telle que $AP = PT$. Cette dernière égalité nous donne un système d'inconnue (a,b,c) dont le triplet $(-2,0,-1)$ est solution.

Donc $A = \begin{pmatrix}1 & 4 & -2\\0 & 6 & -3\\-1 & 4 & 0\end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix}1 & 4 & -2\\1 & 3 & 0\\1 & 4 & -1\end{pmatrix}$ puis $P^{-1} = \begin{pmatrix}3 & 4 & -6\\-1 & -1 & 2\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

EXERCICE 2

1.

Il suffit de poser $\phi : t \mapsto e^{-t} \in \mathscr{C}([0\,;1],\mathbb{R})$ et F l'ensemble des fonctions affines, sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}([0\,;1],\mathbb{R})$.

2.

On peut orthonormaliser $(t \mapsto 1,\ t \mapsto t)$, base de F, en (f,g) puis, le projeté orthogonal de ϕ sur F est donné par $p_F(\phi) = (\phi|f)f + (\phi|g)g$.

On a alors $f : t \mapsto 1$, $g : t \mapsto \sqrt{12}\left(t - \frac{1}{2}\right)$, puis $(\phi|f) = 1 - \frac{1}{e}$, $(\phi|g) = \sqrt{3}\left(1 - \frac{3}{e}\right)$, et enfin $p_F(\phi) : t \mapsto \left(6 - \frac{18}{e}\right)t + \frac{8}{e} - 2$.

3.

On en déduit $I = d(\phi,F)^2 = \|\phi - p_F(\phi)\|^2 = \|\phi\|^2 - \|p_F(\phi)\|^2$. (théorème de Pythagore)

Puis $I = (\phi|\phi) - (\phi|f)^2 - (\phi|g)^2 = \left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{e}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\left(1 - \frac{3}{e}\right)\right)^2$, soit encore

$$I = \frac{1 - 114e^2 + 80e^3 - 15e^4}{4e^4}$$

Exercice 3

Partie 1

1.

En résolvant le système d'inconnues U et V formé par les deux premières équations, on trouve $V = \dfrac{\lambda A - A^2}{\mu(\lambda - \mu)}$ et $U = \dfrac{\mu A - A^2}{\lambda(\mu - \lambda)}$.

On substitue V et U dans la troisième relation et on a bien $A^3 = (\lambda+\mu)A^2 - \lambda\mu A$.

2.

Démonstration par récurrence double.
L'initialisation est donnée par les deux premières relations.
Soit $p \geq 2$. Supposons la propriété vraie aux rangs $p-1$ et p.
On sait que $A^3 = (\lambda+\mu)A^2 - \lambda\mu A$, donc en multipliant par A^{p-2}, on obtient
$A^{p+1} = (\lambda+\mu)A^p - \lambda\mu A^{p-1}$.
Puis, $A^{p+1} = (\lambda+\mu)(\lambda^p U + \mu^p V) - \lambda\mu\left(\lambda^{p-1}U + \mu^{p-1}V\right) = \lambda^{p+1}U + \mu^{p+1}V$ ce qui établit l'hérédité.

3.

a)

Puisque f est linéaire,

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{Ker}(f) &\Longleftrightarrow f(x) = 0 \\ &\Longrightarrow f^{p-1} \circ f(x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow f^p(x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x \in \mathbf{Ker}(f^p) \end{aligned}$$

b)

On sait que $A^{p+1} = (\lambda+\mu)A^p - \lambda\mu A^{p-1}$, et que f est canoniquement associé à A donc $f^{p+1} = (\lambda+\mu)f^p - \lambda\mu f^{p-1}$, ce qui donne $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda\mu f^{p-1}(x) = (\lambda+\mu)f^p(x) - f^{p+1}(x)$.

c)

Démonstration par récurrence.
Pour $p = 2$, la relation précédente donne $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda\mu f(x) = (\lambda+\mu)f^2(x) - f^3(x)$.
Ainsi, si $x \in \mathbf{Ker}\left(f^2\right)$, $f^2(x) = 0$ puis $f^3(x) = 0$ et donc, comme $\lambda\mu \neq 0$, $f(x) = 0$; c'est à dire $x \in \mathbf{Ker}(f)$. On a donc bien $\mathbf{Ker}\left(f^2\right) \subset \mathbf{Ker}(f)$.
Soit $p \geq 2$. Supposons $\mathbf{Ker}(f^p) \subset \mathbf{Ker}(f)$.
Soit alors $x \in \mathbf{Ker}\left(f^{p+1}\right)$ alors $f^{p+1}(x) = 0$ puis $f^{p+2}(x) = 0$, et comme
$\lambda\mu f^p(x) = (\lambda+\mu)f^{p+1}(x) - f^{p+2}(x)$ et que $\lambda\mu \neq 0$, on a $f^p(x) = 0$ et donc
$x \in \mathbf{Ker}(f^p) \subset \mathbf{Ker}(f)$. On a donc bien $\mathbf{Ker}\left(f^{p+1}\right) \subset \mathbf{Ker}(f)$ et on a l'hérédité.

d)

> Des questions précédentes, on sort $\textbf{Ker}(f^p) = \textbf{Ker}(f)$ et ensuite, on en déduit par le théorème du rang que $\textbf{dim}(\textbf{Im}(f^p)) = \textbf{dim}(\textbf{Im}(f))$, c'est à dire $\textbf{rg}(A^p) = \textbf{rg}(A)$.

Partie 2

1.

> ${}^tV\ U = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \in \mathbb{R}$.

2.

> $\left(U\ {}^tV\right)^2 = \left(U\ {}^tV\right)\left(U\ {}^tV\right) = U\ \left({}^tV\ U\right)\ {}^tV = k\left(U\ {}^tV\right)$ où l'on a posé $k = {}^tV\ U$.

> $$\begin{aligned} \left(U\ {}^tV\right)^2 = k\left(U\ {}^tV\right) &\iff & (A - aI_n)^2 = k(A - aI_n) \\ &\iff & A^2 + a^2 I_n - 2aA = kA - kaI_n \\ &\iff & A^2 = (2a+k)A - a(a+k)I_n \end{aligned}$$
>
> On a donc $\alpha = 2a + k$ et $\beta = -a(a+k)$.

3.

> On a clairement $a_{ij} = \begin{cases} a + u_i v_i & \textbf{si } i = j \\ u_i v_j & \textbf{si } i \neq j \end{cases}$

> $\textbf{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n}(a + u_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} a + \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = na + {}^tV\ U.$

4.

> On a alors $\alpha = 2a + k = 2a + \textbf{Tr}(A) - na = (2-n)a + \textbf{Tr}(A)$
> et $\beta = -a(a + \textbf{Tr}(A) - na) = (n-1)a^2 - a\textbf{Tr}(A)$.

5.

λ valeur propre de A donc $\exists X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $AX = \lambda X$. Ainsi $A^2X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda^2 X$ et, comme $X \neq 0$, λ^2 est valeur propre de A^2.

Soit X un vecteur propre associé à la valeur propre λ. On a $A^2 = \alpha A + \beta I_n$ donc $A^2X = \alpha AX + \beta I_n X$, c'est à dire $\lambda^2 X = \alpha\lambda X + \beta X$, ou encore $\left(\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta\right)X = 0$; on conclut que $\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0$, puisque $X \neq 0$.

6.

On cherche λ_1 et λ_2 tels que $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = \alpha = (2-n)a + \mathbf{Tr}(A) \\ \lambda_1\lambda_2 & = -\beta = -(n-1)a^2 + a\mathbf{Tr}(A) \end{cases}$ et clairement $\lambda_1 = a$ et $\lambda_2 = \mathbf{Tr}(A) - (n-1)a$ conviennent et sont les seules possibles.

7.

a)

E_1 et E_2 sont les sous-espaces propres de A associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2. Ils sont en somme directe si $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
Or

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2 &\iff \mathbf{Tr}(A) - na = 0 \\ &\iff {}^tV\ U = 0 \end{aligned}$$

ce qui est impossible puisque ${}^tV\ U = \mathbf{Tr}\left({}^tV\ U\right) = \mathbf{Tr}\left(U\ {}^tV\right) \neq 0$. On conclut que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

b)

On cherche X_1 et X_2 tels que $\begin{cases} X = X_1 + X_2 \\ AX_1 = \lambda_1 X_1 \\ AX_2 = \lambda_2 X_2 \end{cases}$.

On obtient $\begin{cases} X = X_1 + X_2 \\ AX = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 \end{cases}$ puis $\begin{cases} X_1 = \dfrac{\lambda_2 X - AX}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ X_2 = \dfrac{\lambda_1 X - AX}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{cases}$. Ce qui achève l'analyse.

Enfin, on vérifie que ces deux valeurs répondent à la question et donne la synthèse.

c)

Les deux questions précédentes nous permettent de conclure que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = E_1 \oplus E_2$ qui est une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité de A.