Math. - ES 1 - S1 - Analyse

mercredi 9 janvier 2019 - Durée 2 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1

On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre en la fonction inconnue y de la variable x :

$$(\mathscr{E}_\lambda) \quad x(x+1)y''(x) + (2x+1)y'(x) - \lambda(\lambda+1)y(x) = 0,$$

où λ désigne un paramètre réel.

1. Etant donné $\lambda \in \mathbb{R}$, comparer les équations $(\mathscr{E}_\lambda)$ et $(\mathscr{E}_{-\lambda-1})$.
On supposera dans la suite que $\lambda \geq -\dfrac{1}{2}$.
Dans la suite, y désigne un fonction de la variable x, admettant un développement en série entière $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ au voisinage de 0.

2. Montrer que pour que y soit solution de $(\mathscr{E}_\lambda)$, il faut et il suffit que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{(\lambda+n+1)(\lambda-n)}{(n+1)^2} a_n$$

3. a. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ pour que l'équation $(\mathscr{E}_\lambda)$ admette des solutions polynomiales de degré donné $d \in \mathbb{N}$.

b. Lorsque c'est le cas, montrer qu'il existe une unique solution polynomiale de $(\mathscr{E}_\lambda)$ de degré d, que nous noterons φ_d, telle que $\varphi_d(0) = 1$.

c. Expliciter la fonction polynôme φ_1.

d. Déterminer les coefficients $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ tels que :

$$\frac{8x^2+8x+1}{x(x+1)(2x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2x+1}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma}{(2x+1)^2}.$$

En déduire la solution générale de l'équation $(\mathscr{E}_1)$ sur $]0, +\infty[$.

4. On se place dans le cas où $\lambda \geq -\dfrac{1}{2}, \lambda \notin \mathbb{N}$.

a. On suppose que y est une solution non identiquement nulle de $(\mathscr{E}_\lambda)$.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

b. Montrer qu'il existe une unique solution de $(\mathscr{E}_\lambda)$ que nous noterons φ_λ, développable en série entière sur $]-1, 1[$ et telle que $\varphi_\lambda(0) = 1$.

c. Expliciter le développement en série entière de la fonction $\varphi_{-\frac{1}{2}}$.

T.S.V.P.

Exercice 2

1. Montrer que les intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\,\mathrm{d}t$ convergent.

On notera $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\,\mathrm{d}t$

2. A l'aide d'un changement de variable, montrer que

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$$

3. A l'aide d'un changement de variable, trouver une relation entre $I + J$ et I.

4. A l'aide d'un changement de variable montrer que $I = J$.

5. Déduire de ce qui précède la valeur de I et J.

Exercice 3

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \\ z'(t) = x(t) + z(t) \end{cases}$$

Fin de l'énoncé d'analyse