- ES-S2 - - 2018-2019 -

– Correction - Analyse - Probabilités –

PROBLEME 1

On considère les fonctions F et G définies par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin(t)}{t}\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}\cos(t)}{x}\mathrm{d}t$$

1. Montrer que pour tout réel $t > 0$:

$$\frac{|\sin(t)|}{t} \leq 1$$

Soit $t > 0$. La fonction cos est continue sur $[0, t]$, et $\left|\int_0^t \cos(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^t |\cos(x)|\mathrm{d}x \leq \int_O^t \mathrm{d}x$. Ce qui équivaut à

$$|\sin(t)| \leq t$$

c'est-à-dire, puisque $t > 0$,

$$\frac{|sin(t)|}{t} \leq 1$$

2. Montrer que F et G sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

On note f la fonction définie sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par : $f(x, t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}\sin(t)}{t}$

et g la fonction définie sur $]0, +\infty[\times[0, +\infty[$ par : $g(x, t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}\sin(t)}{x}$.

Soit $x > 0$. Pour tout $t \geq 0$, on a $|g(x, t)| \leq \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{x}$, et d'après la question précédente, pour tout $t > 0$, on a $|f(x, t)| \leq \mathrm{e}^{-xt}$.

Comme $x > 0$, l'intégrale de référence $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$ converge, donc par comparaison de fonctions positives, on en déduit que $\int_0^{+\infty} f(x, t)\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} g(x, t)\mathrm{d}t$ sont absolument convergentes.

On a donc F et G définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
Montrer que F et G sont de classe C^1 sur $[a, b]$. Que conclure ?

On reprend les notations de la question précédente.

- On vient de montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
- Pour $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, et $\forall (x, t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\mathrm{e}^{-xt}\sin(t)$.
- Pour tout $x \in [0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Hypothèse de domination :
  $\forall (x, t) \in [a, b]\times]0, +\infty[, \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leq \mathrm{e}^{-at}$.
  Comme $a > 0$, l'intégrale de référence $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t$ est convergente.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, F est de classe C^1 sur tout compact $[a, b]$ de $]0, +\infty[$, elle est donc de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout $x > 0$:

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -\mathrm{e}^{xt}\sin(t)\mathrm{d}t$$

- On a montré dans l'exercice précédent que pour $x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
- Pour $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, et $\forall (x,t) \in]0,+\infty[\times[0,+\infty[$, on a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\mathrm{e}^{-xt}\cos(t)\dfrac{xt+1}{x^2}$.
- Pour tout $x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
- Hypothèse de domination :
  $\forall (x,t) \in [a,b]\times[0,+\infty[, \left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \mathrm{e}^{-at}\dfrac{bt+1}{a^2}$.
  On note $\varphi_{a,b} : t \mapsto \mathrm{e}^{-at}\dfrac{bt+1}{a^2}$; $\varphi_{a,b}$ est positive, continue sur $[0,+\infty[$, et par croissances comparées : $\varphi_{a,b}(t) = o_{t\to+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
  Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, $\varphi_{a,b}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, puis par continuité, sur $[0,+\infty[$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, G est de classe C^1 sur tout compact $[a,b]$ de $]0,+\infty[$, elle est donc de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

4. Pour tout réel $x > 0$, comparer $F'(x)$ et $G(x)$.

On pensera à remarquer que $G(x) = \lim\limits_{X\to+\infty}\left(\displaystyle\int_0^X \frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin(t)}{x}\mathrm{d}t\right)$, afin de pouvoir intégrer par parties.

Soit $X > 0$. Comme $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{x}$ et $t \mapsto \sin(t)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, le théorème d'intégration par parties (sur un compact) donne :

$$\int_0^X \frac{\mathrm{e}^{-xt}\cos(t)}{x}\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin(t)}{x}\right]_{t=0}^{t=X} + \int_0^X \mathrm{e}^{-xt}\sin(t)\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-xX}\sin(X)}{x} + \int_0^X \mathrm{e}^{-xt}\sin(t)\mathrm{d}t$$

Par passage à la limite lorsque X tend vers $+\infty$ (toutes les limites étant finies), on obtient :

$$\forall x > 0, \quad G(x) = -F'(x)$$

5. Montrer que pour tout réel $x > 0$:

$$F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

Pour $x > 0$, $t \mapsto \mathrm{e}^{(i-x)t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, puisque $|\mathrm{e}^{(i-x)t}| = \mathrm{e}^{-xt}$, et d'après la question précédente :

$$-xF'(x) = xG(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\cos(t)\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(i-x)t}\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{x-i}\right) = \frac{x}{1+x^2}$$

On conclut :

$$\forall x > 0, \quad F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

6. Montrer que F a une limite nulle lorsque x tend vers $+\infty$.

On a montré que $\forall (x,t) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[, 0 \leq |f(x,t)| \leq \mathrm{e}^{-xt}$, avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$.

On en déduit :

$$\forall x > 0, \quad 0 \leq \int_0^{+\infty} |f(x,t)|\mathrm{d}t \leq \frac{1}{x}$$

Le théorème d'encadrement donne $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

7. Déduire des questions précédentes l'expression de $F(x)$ pour tout réel $x > 0$.

On déduit des questions précédentes que :
- $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x > 0, F(x) = -\mathrm{Arctan}(x) + C$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0 = -\dfrac{\pi}{2} + C$

Par conséquent,

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(x)$$

8. On admet que

$$\lim_{x\to 0}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin(t)}{t}\mathrm{d}t\right)=\int_0^{+\infty}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin(t)}{t}\right)\mathrm{d}t$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$$

Le résultat admis permet d'écrire

$$\lim_{x\to 0}F(x)=\int_0^{+\infty}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin(t)}{t}\right)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$$

PROBLEME 2

On rappelle qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$ si

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbb{P}(X=n)=p(1-p)^{n-1}$$

1. Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p.

a. Calculer pour tout $n\in\mathbb{N},\mathbb{P}(X>n)$.
Soit $n\in\mathbb{N}$. Par σ-additivité,

$$\mathbb{P}(X>n)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty}(X=k)\right)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}p(1-p)^{k-1}=p\times\frac{(1-p)^n}{1-(1-p)}=(1-p)^n$$

b. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre p.
On note T le rang du premier succès obtenu :

$$T=\inf\{k\geq 1,X_k=1\}$$

Montrer que T a la même loi que X.
Assurons nous tout d'abord que T est bien définie, c'est-à-dire que la probabilité de ne jamais avoir $X_k=1$ est nulle.
Pour $n>0$, on note $A_n=\bigcap_{k=1}^{n}(X_k=0)$. Par indépendance, on a : $\mathbb{P}(A_n)=\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_k=0)=(1-p)^n$.

(A_n) est une suite décroissante d'événements, et $\bigcap_{n=1}^{+\infty}A_n=\bigcap_{k=1}^{+\infty}(X_k=0)$.

Le théorème de limite monotone donne : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}(X_k=0)\right)=\lim_{n\to+\infty}(1-p)^n=0$.
Ainsi, T est bien définie, et $T(\Omega)=\mathbb{N}^*$.
Pour $n=1$, $\mathbb{P}(T=1)=\mathbb{P}(X_1=1)=p=\mathbb{P}(X=1)$ et pour $n\in\mathbb{N},n\geq 2$, par indépendance, on a :

$$\mathbb{P}(T=n)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1}(X_k=0)\cap(X_n=1)\right)=\prod_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}(X_k=0)\mathbb{P}(X_n=1)=(1-p)^{n-1}p=\mathbb{P}(X=n)$$

Ainsi, T suit bien une loi géométrique de paramètre p.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p.

a. Rappeler le développement en série entière en 0 de $f:x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$, ainsi que le rayon de convergence.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$$

avec un rayon de convergence égal à 1.

b. En déduire le développement en série entière en 0 de $g : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$, ainsi que le rayon de convergence.

f est de classe C^∞ sur $]-1,1[$, et le théorème de dérivation donne :

$$g(x) = f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) x^n$$

avec le même rayon de convergence.

c. Calculer la fonction génératrice de X.

On a : $G_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} t^n = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$ définie pour $|(1-p)t| < 1$, c'est-à-dire $t \in \left]-\dfrac{1}{1-p}, \dfrac{1}{1-p}\right[$.

d. En déduire la fonction génératrice de $X+Y$.

Comme X et Y sont indépendantes, on a :

$$\forall t \in \left]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}\right[, \quad G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t) = \frac{p^2 t^2}{(1-(1-p)t)^2}$$

e. En déduire que pour tout $n \geq 2$, $\mathbb{P}(X+Y=n) = p^2(n-1)(1-p)^{n-2}$.

Des questions **2b** et **2d**, on obtient :

$$\forall t \in \left]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}\right[, \quad G_{X+Y}(t) = p^2 t^2 g\left((1-p)t\right) = p^2 t^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n((1-p)t)^{n-1} = \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) p^2 (1-p)^{n-2} t^n$$

Comme $G_{X+Y}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X+Y=n) t^n$, par identification, on conclut :

$$\forall n \geq 2, \quad \mathbb{P}(X+Y=n) = p^2 (n-1)(1-p)^{n-2}$$

f. Déterminer, pour $n \geq 2$ la loi de X sachant $X+Y=n$.

Soient $n \geq 2$ et $k \in \mathbb{N}^*$. X et Y étant indépendantes, on a :

$$\mathbb{P}_{(X+Y=n)}(X=k) = \frac{\mathbb{P}\left((X=k) \cap (X+Y=n)\right)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} = \frac{\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}$$

et ainsi,

$$\mathbb{P}_{(X+Y=n)}(X=k) = \begin{cases} \dfrac{p(1-p)^{k-1} p (1-p)^{n-k-1}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} = \dfrac{1}{n-1} & \text{si } 1 \leq k \leq n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En conclusion, pour $n \geq 2$, la loi de X sachant $X+Y=n$ est la loi uniforme sur $[\![1, n-1]\!]$.

3. On considère toujours X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p. On pose $T = \max(X,Y)$ et $Z = \min(X,Y)$. On pose $q = 1-p$.

a. Exprimer $X+Y$ et $|X-Y|$ en fonction de Z et T.

$X+Y = T+Z$ et $|X-Y| = T-Z$

b. Montrer que $\mathbb{P}(X=Y) = \dfrac{p}{1+q}$.

Par σ-additivité puis indépendance, on a :

$$\mathbb{P}(X=Y) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} ((X=n) \cap (Y=n))\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\mathbb{P}(Y=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^2 q^{2n-2} = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p}{1+q}$$

c. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Z > n)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a par indépendance et d'après **1a** :

$$\mathbb{P}(Z>n) = \mathbb{P}((X>n) \cap (Y>n)) = \mathbb{P}(X>n)\mathbb{P}(Y>n) = q^{2n}$$

d. En déduire que Z suit une loi géométrique de paramètre $1-q^2$.
$Z(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et pour $n\in\mathbb{N}^*$, d'après la question précédente :

$$\mathbb{P}(Z=n)=\mathbb{P}(Z>n-1)-\mathbb{P}(Z>n)=q^{2(n-1)}-q^{2n}=q^{2(n-1)}(1-q^2)$$

Ainsi, Z suit une loi géométrique de paramètre $(1-q^2)$.

e. Calculer pour tout $n\in\mathbb{N}^*, \mathbb{P}(T\leq n)$.
Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et par indépendance on a d'après la question **1a** :

$$\mathbb{P}(T\leq n)=\mathbb{P}\left((X\leq n)\cap(Y\leq n)\right)=\mathbb{P}(X\leq n)\mathbb{P}(Y\leq n)=\left(1-\mathbb{P}(X>n)\right)\left(1-\mathbb{P}(Y>n)\right)=(1-q^n)^2$$

(qui est encore valable pour $n=0$).

f. En déduire la loi de T.
$T(\Omega)=\mathbb{N}^*$, et pour $n\in\mathbb{N}^*$, d'après **2a** :

$$\mathbb{P}(T=n)=\mathbb{P}(T\leq n)-\mathbb{P}(T\leq n-1)=(1-q^n)^2-(1-q^{n-1})^2$$