

Math. - ES 1 - S1 - Analyse

mercredi 04 janvier 2016 - Durée 3 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1

Résoudre dans \mathbb{R} le système différentiel linéaire suivant :

$$(L) : \begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2' = -y_1 + 2y_2 + y_3 \\ y_3' = -2y_2 + 4y_3 \end{cases} .$$

Exercice 2

On donne les résultats suivants : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

1. Soit $I = \int_{-1}^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx$.

- a. Etudier la fonction $f : x \mapsto -\frac{\ln(1-x)}{x}$ sur son domaine de définition et donner l'allure de son graphe.
- b. Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

$$J = \int_{-1}^0 f(x) dx \quad \text{et} \quad K = \int_0^1 f(x) dx.$$

2. Etude de la série entière $\sum_{n \geq 0} x^n$.

- a. Donner le rayon de convergence R de cette série.
- b. Etudier la convergence des séries numériques $\sum_{n \geq 0} R^n$ et $\sum_{n \geq 0} (-R)^n$.
- c. Déterminer la somme F de la série entière $\sum_{n \geq 0} x^n$ ainsi que son domaine de définition.

3. Etude de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ de somme G .

- a. Donner le rayon de convergence R' de cette série.
- b. Etudier la convergence de la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{(R')^n}{n}$.

T.S.V.P.

c. Etude de $G(-R')$.

i. Montrer que, pour $x \in [-R', 0]$, on a $G_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.

ii. Montrer que, pour $t \in [-R', 0]$, on a $\left| \frac{t^n}{1-t} \right| \leq |t|^n$ et en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_{-1}^0 \frac{t^n}{1-t} dt \right| = 0$.

iii. En déduire que $G(-R')$ existe et donner sa valeur.

d. Déterminer la somme G de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ et son domaine de définition.

4. Etude de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$.

a. Donner le rayon de convergence R'' de cette série.

b. Etudier la convergence des séries numériques $\sum_{n \geq 1} \frac{(R'')^n}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{(-R'')^n}{n^2}$.

c. Déterminer le domaine de définition de la somme H de cette série et son expression, sous forme d'une intégrale, sur $] -R'', R''[$.

5. Etude de la continuité de H en 1 et en -1.

a. Montrer, à l'aide d'une comparaison à une intégrale, que la fonction $T_n : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$ est bornée, sur $[0, 1]$, par 0 et $\frac{1}{n}$.

b. En déduire qu'en notant $H_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k^2}$ on a :

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |H(1) - H(x)| \leq |H_n(1) - H_n(x)| + \frac{2}{n}.$$

c. Conclure.

6. Calcul de I .

a. Justifier que l'on a $H(1) = -\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$.

b. En déduire la valeur de l'intégrale impropre K .

c. En déduire la valeur de l'intégrale impropre J , puis de I .

Fin de l'énoncé d'analyse