Math. – ES 2 - S2 – Analyse

mercredi 24 mai 2017 - Durée 3 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ y-4 & 2x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. On note $E_1 = \{u \in \mathbb{R}_+ /\ u^2 \notin \mathbb{N}\}$ et E_2 son complémentaire dans $\mathbb{R}_+$.
Prouver que E_2 est un ensemble dénombrable.

3. Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et f définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall u \geq 0,\ f(u) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad u^2 \notin \mathbb{N} \\ \dfrac{\lambda}{2^{u^2}} & \text{si} \quad u^2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Déterminer λ pour qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ telle que f soit la loi de probabilité d'une variable aléatoire X définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
Préciser $X(\Omega)$.

4. Déterminer $X^2(\Omega)$ et la loi de probabilité de X^2.

5. Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X^2)$ de la variable aléatoire X^2.

6. Déterminer la fonction génératrice de la variable aléatoire X^2.
Retrouver alors la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$ obtenue à la question précédente.

7. Soit Y une variable aléatoire définie sur Ω, indépendante de la variable aléatoire X, et suivant la loi définie par :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+,\ \mathbb{P}(Y = u) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad u^2 \notin \mathbb{N} \\ \dfrac{\lambda}{2^{u+1}} & \text{si} \quad u^2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Soit alors Z la variable aléatoire définie sur Ω par $Z = X^2 + Y$.
Déterminer la fonction génératrice de Z. En déduire sa loi de probabilité.

8. Déterminer enfin la probabilité pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Y-4 & 2X \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ soit diagonalisable.

T.S.V.P.

Exercice 2

On pose, lorsque cela est possible :

$$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x\sqrt{t^2-1}}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition I de f.

2. En justifiant son existence, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

3. Calculer $f(1)$. *On pourra utiliser l'application* $\varphi \ : \ u > 0 \mapsto \mathrm{ch}(u)$.

4. Calculer $f(2)$. *On pourra remarquer que la dérivée de* $x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ *est égale à* $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$.

5. Vérifier que f est positive sur I.

6. Montrer que f est décroissante sur I.

7. Prouver que f est de classe C^1 sur I et préciser l'expression de $f'(x)$. Retrouver alors le résultat de la question précédente.

8. Soit $x \in I$. Démontrer la relation suivante :

$$f(x+2) = \frac{x}{x+1} f(x)$$

On pourra effectuer, en la justifiant, une intégration par parties.

9. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression de $f(2p)$ à l'aide de factorielles.

10. Pour tout réel $x > 0$, on pose

$$\varphi(x) = x f(x) f(x+1)$$

Prouver que $\varphi(x+1) = \varphi(x)$. Calculer $\varphi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

11. En utilisant la question précédente, déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

12. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n)f(n+1) = \dfrac{\pi}{2n}$. En déduire que :

$$f(n) \underset{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}^*}}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

13. En utilisant des parties entières, prouver que :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

14. Déduire des questions précédentes le tableau des variations de f sur I et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

15. Prouver que la fonction φ est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Fin de l'énoncé d'analyse