– Correction - Géométrie –

Partie I : Deux surfaces

1. (a) $\begin{cases} z = (y - 2\sqrt{2}x)y \\ y = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} z = \alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha x \\ y = \alpha \end{cases}$

   On obtient une **droite** (incluse dans le plan d'équation cartésienne $y = \alpha$).

   On en déduit que S est une réunion de droites : $\boxed{S \text{ est une } \textbf{surface réglée}}$.

   (b) $\begin{cases} z = (y - 2\sqrt{2}x)y \\ x = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} z = y^2 - 2\sqrt{2}\beta y \\ x = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} z = (y - \sqrt{2}\beta)^2 - 2\beta^2 \\ x = \beta \end{cases}$

   On obtient une **parabole** (incluse dans le plan d'équation cartésienne $x = \beta$).

   (c) i. $\Lambda_\gamma : \begin{cases} z = \gamma \\ \gamma = (y - 2\sqrt{2}x)y \end{cases}$

   • Si $\gamma = 0$: alors Λ_0 est la **réunion des deux droites** de systèmes d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} z = 0 \\ y - 2\sqrt{2}x = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

   • Si $\gamma \neq 0$, on a $\Lambda_\gamma : \begin{cases} z = \gamma \\ y^2 - 2\sqrt{2}xy - \gamma = 0 \end{cases}$

   On étudie cette **conique** incluse dans le plan d'EC $z = \gamma$.

   Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ la matrice symétrique associée. On a alors $\det(A) = -2$ et :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & X - 1 \end{vmatrix} = (X - 2)(X + 1).$$

   Ainsi $\mathrm{sp}(A) = \{-1, 2\}$ donc A est une **hyperbole**.

   D'après le **théorème spectral** A est diagonalisable et il existe $P \in O_2(\mathbb{R})$ telle que :

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   •$E_2(A)$: $\begin{cases} -\sqrt{2}y = 2x \\ -\sqrt{2}x + y = 2y \end{cases} \iff y = -\sqrt{2}x$ d'où $\boxed{E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}}$.

   •$E_{-1}(A)$: $\begin{cases} -\sqrt{2}y = -x \\ -\sqrt{2}x + y = -y \end{cases} \iff x = \sqrt{2}y$ d'où $\boxed{E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}}$.

   Posons $\overrightarrow{I} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\overrightarrow{\imath} - \sqrt{2}\overrightarrow{\jmath})$ et $\overrightarrow{J} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath})$.

Alors dans le nouveau repère orthonormal $(0, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{k})$:

$$\Lambda_\gamma \ : \ \begin{cases} z = \gamma \\ 2X^2 - Y^2 = \gamma \end{cases}$$

Pour $\gamma \neq 0$, on obtient bien une **hyperbole**.
Pour $\gamma = 0$, on obtient la **réunion de deux droites**, qui sont les **asymptotes** des hyperboles si on fait la confusion des sommets O_γ, c'est-à-dire, en considérant toutes ces courbes dans un même plan (XOY).

Pour faire un tracé correct dans le repère $(O_\gamma, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ et placer précisément les asymptotes et les sommets, on peut utiliser la formule de changement de repère entre les deux bases orthonormales (directes) du plan :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

• **Sommets** : pour $\gamma = -2$, les sommets ont pour coordonnées $(0, \sqrt{2})$ et $(0, -\sqrt{2})$ dans $(O_\gamma, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ puis $\frac{1}{\sqrt{3}}(2, \sqrt{2})$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}(-2, -\sqrt{2})$ dans $(O_\gamma, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.
Pour $\gamma = 1$, les sommets ont pour coordonnées $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ et $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ dans $(O_\gamma, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ puis $\frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1)$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ dans $(O_\gamma, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.
• **Asymptotes** : elles ont pour équations cartésiennes $Y = \pm\sqrt{2}X$ dans $(O_\gamma, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ puis $y = 0$ et $y = 2\sqrt{2}x$ dans $(O_\gamma, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. **Voir graphe à la fin**.

(d) Soit $f \ : \ (x, y, z) \mapsto y^2 - 2\sqrt{2}xy - z$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ \overrightarrow{\text{grad}}\, f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}y \\ 2y - 2\sqrt{2}x \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0$$

donc S est une surface régulière. Et $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0, y_0, z_0)$ est un **vecteur normal** au plan tangent à S en M_0, d'où une équation cartésienne de P_0 :

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}y_0 \\ 2y_0 - 2\sqrt{2}x_0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

On utilise également que $(x_0, y_0, z_0) \in S$ donc $z_0 = (y_0 - 2\sqrt{2}x_0)y_0$.
Finalement une équation cartésienne de P_0 est :

$$\boxed{P_0 \ : \ (-2\sqrt{2}y_0)x + (2y_0 - 2\sqrt{2}x_0)y - z + 2\sqrt{2}x_0y_0 - y_0^2 = 0.}$$

2. (a)

$$\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2,\ (u^2-v^2)^2-(u+v)^4+2\sqrt{2}(\sqrt{2}uv)(u+v)^2=\cdots=0$$

Ainsi $\Sigma \subset S$.

(b) La surface Σ est de classe $\mathcal{C}^1$ (fonctions usuelles) et :

$$\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u}(u,v)=\begin{pmatrix}\sqrt{2}v\\ 2u+2v\\ 4u^3-4uv^2\end{pmatrix}$$

$$\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}(u,v)=\begin{pmatrix}\sqrt{2}u\\ 2v+2u\\ 4v^3-4u^2v\end{pmatrix}$$

Or $M(u,v)$ est non régulier si et seulement si $\left(\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u}(u,v),\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}(u,v)\right)$ est liée.

Étant donnée l'égalité des deuxièmes coordonnées, éventuellement nulles auquel cas $u=-v$ et la famille est toujours liée, on obtient :

$$\begin{aligned} M(u,v)\text{ non régulier} &\iff \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u}(u,v)=\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}(u,v)\ \textbf{ou}\ u=-v\\ &\iff \begin{cases} u=v\\ 4u^3-4uv^2=4v^3-4u^2v\end{cases}\quad \textbf{ou}\ u=-v\\ &\iff u=v\ \textbf{ou}\ u=-v\end{aligned}$$

Pour tout $u\in\mathbb{R}$, $M(u,u)=\begin{pmatrix}\sqrt{2}u^2\\ 4u^2\\ 0\end{pmatrix}$ et $M(u,-u)=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}u^2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

On obtient donc la réunion de $\boxed{\text{deux demi-droites de sommet } O}$.

(c) Ce plan est dirigé par les vecteurs $\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u}(u,v)$ et $\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}(u,v)$. D'où :

$$P:\begin{vmatrix} x-\sqrt{2}uv & \sqrt{2}v & \sqrt{2}u\\ y-(u+v)^2 & 2u+2v & 2v+2u\\ z-(u^2-v^2)^2 & 4u^3-4uv^2 & 4v^3-4u^2v\end{vmatrix}=0$$

En développant par rapport à la première colonne, on obtient par exemple, après division par $u^2-v^2\neq 0$ puis par $2\sqrt{2}$:

$$\boxed{P\ :\ 2\sqrt{2}(x-\sqrt{2}uv)(u+v)^2-2(y-(u+v)^2)(u^2+v^2)+(z-(u^2-v^2)^2)=0.}$$

Partie II : Etude d'une courbe

1. $\Gamma : \begin{cases} x = -2\sqrt{2}u^2 \\ y = u^2 \\ z = 9u^4 \end{cases}, \; u \in \mathbb{R}_+^*$

2. (a) Notons $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$. On a bien $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{w}|| = 1$ et $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle = 0$.

   Il suffit donc de poser $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\overrightarrow{\imath} - \frac{1}{3}\overrightarrow{\jmath}$.

   (b) On a d'après ce qui précède : $Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Q_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (c) Les deux bases étant orthonormales, Q_2 est orthogonale et q_2 est une isométrie vectorielle. On a $\det(Q_2) = -1$. Or Q_2 est symétrique donc ${}^tQ_2Q_2 = I_3 = Q_2^2$.
   Ainsi q_2 est une symétrie. Par conséquent q_2 est la $\boxed{\textbf{réflexion} \text{ par rapport au plan } \mathrm{Ker}(q_2 - Id)}$ qui a pour équation $\boxed{x = \sqrt{2}y}$.

   (d) Les deux bases étant orthonormales, Q_1 est orthogonale et q_1 est une isométrie vectorielle. On a $\det(Q_1) = 1$. Donc q_1 est une **rotation** par rapport à l'axe $\Delta = \mathrm{Ker}(q_1 - Id)$.
   On calcule $\mathrm{Ker}(q_1 - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\{(\sqrt{2}, 1, \sqrt{2})\})$ d'où $\boxed{\Delta = \mathrm{Vect}(\sqrt{2}\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} + \sqrt{2}\overrightarrow{k})}$.

   Posons $\overrightarrow{I} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ puis $\overrightarrow{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (orthogonal à $\overrightarrow{I}$ et normé).

   On complète alors en une base orthonormée directe en posant $\overrightarrow{K} = \overrightarrow{I} \wedge \overrightarrow{J} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$.

   On a alors $1 + 2\cos\theta = \mathrm{tr}(Q_2)$ et $\sin\theta = \langle q_1(\overrightarrow{J}), \overrightarrow{K} \rangle$ (l'axe Δ étant **orienté** par $\overrightarrow{I}$).

   On calcule donc $Q_1 \times \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ puis $\boxed{\begin{cases} \cos\theta = -\frac{2}{3} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases}}$

3. D'après le cours on a $\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}$.

   Remarque : notation maladroite (confusion possible avec une dérivée).

4. On part de la représentation paramétrique $\Gamma : \begin{cases} x = -2\sqrt{2}u^2 \\ y = u^2 \\ z = 9u^4 \end{cases}, \; u > 0.$

On a alors $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = {}^tQ_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ car $Q_1 \in O_3(\mathbb{R})$.

On obtient donc $\begin{cases} X = 9u^4 \\ Y = -3u^2 \\ Z = 0 \end{cases}$, $u > 0$ ou encore $\begin{cases} X = 9v^2 \\ Y = -3v \\ Z = 0 \end{cases}$, $v > 0$.

Ainsi $\boxed{\Gamma \text{ est une demi-parabole (privée du sommet)}}$.

5. On a alors un **problème de Cauchy**. Donc d'après le théorème de Cauchy, il existe une et une seule solution.

6. (a) On calcule $\chi_B = \begin{vmatrix} X - \frac{4}{5} & \frac{2\sqrt{2}}{5} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{5} & X - \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{4\sqrt{2}}{5} & X - 2 \end{vmatrix} = X(X-1)(X-2)$.

   Ainsi $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et admet **3 valeurs propres distinctes** donc B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   On calcule les 3 sous-espaces propres :

$$E_0 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix},\ E_1 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $P^{-1}BP = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   (b) En posant $Y = P^{-1}X$ on obtient $Y' = DY$ qui se résout immédiatement.

   ainsi $X = PY = P\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta e^t \\ \gamma e^{2t} \end{pmatrix}$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Les solutions de Υ sont donc de la forme :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 2\sqrt{2}\beta e^t \\ \sqrt{2}\alpha + \beta e^t \\ \alpha + \gamma e^{2t} \end{pmatrix} \text{ où } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.}$$

   (c) Considérons une solution de Υ et reprenons les notations de la question précédente.

   Il faut ici remarquer que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $x(t) + 2\sqrt{2}y(t) = 5\alpha$.

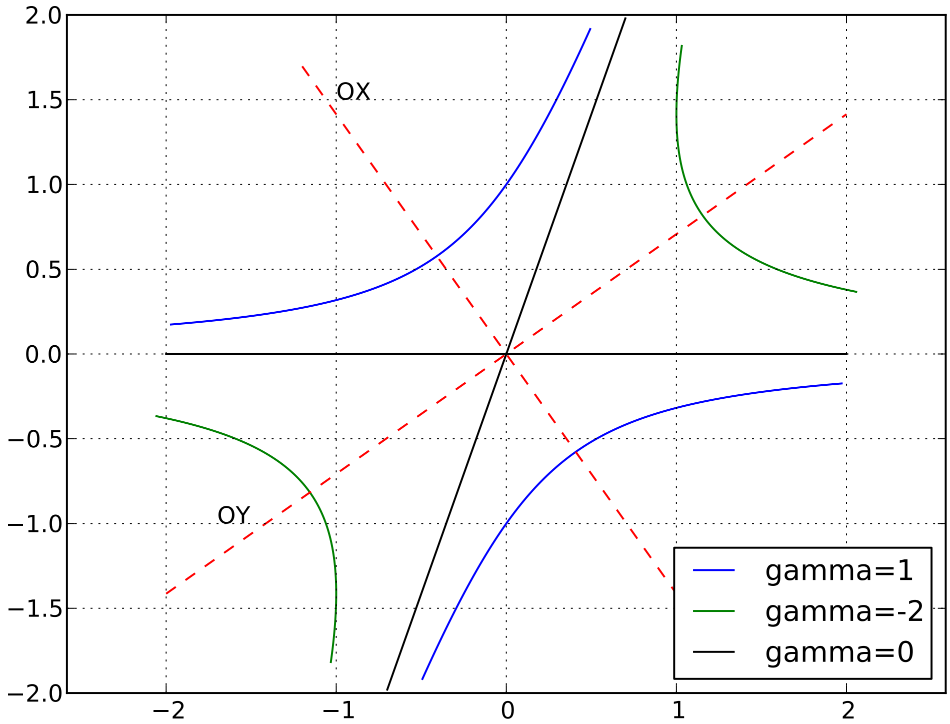
   Ainsi $\boxed{\text{cette solution est incluse dans le plan d'équation cartésienne } x + 2\sqrt{2}y = 5\alpha.}$

   (d) Attention : comme on peut le vérifier, la représentation paramétrique initiale de Γ n'est pas solution du système différentiel !

   Néanmoins posons $u = \sqrt{e^t}$ avec $t \in \mathbb{R}$, autrement dit $t = \ln(u^2)$.

   Alors une **nouvelle représentation paramétrique** est Γ : $\begin{cases} x = -2\sqrt{2}e^t \\ y = e^t \\ z = 9e^{2t} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

   Ainsi $\boxed{\Gamma \text{ est bien une courbe intégrale de } \Upsilon \text{ (en prenant } (\alpha, \beta, \gamma) = (0, 1, 9))}$.


OX
OY
gamma=1
gamma=-2
gamma=0
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2
−1
0
1
2