Math. - CC 3 - Correction

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes linéaires suivants où a, b, c sont des réels fixés :

1. $\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ x+y-z &= 0 \\ x+2y-z &= 3 \end{cases}$

Par le pivot de Gauss, en utilisant la matrice augmentée ou non, on obtient comme ensemble solution

$$\mathscr{S} = \{(-2, 3, 1)\}$$

2. $\begin{cases} 2x-y+2z &= a \\ 3x-y+z &= b \\ -2x+3y-10z &= c \end{cases}$

La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & a \\ 3 & -1 & 1 & b \\ -2 & 3 & -10 & c \end{array}\right)$$

qui est équivalente par lignes à

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b-a \\ 0 & 1 & -4 & 2b-3a \\ 0 & 0 & 0 & 7a-4b+c \end{array}\right)$$

Les opérations élémentaires appliquées sur les lignes sont $L_2 \leftarrow 2L_2$, $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, $L_1 \leftarrow \dfrac{1}{2}L_1$.

Premier cas $7a - 4b + c = 0$

On peut conclure que le système est compatible et ses solutions sont

$$\{(z+b-a, 4z+2b-3a, z),\ z \in \mathbb{R}\}$$

Second cas $7a - 4b + c \neq 0$

On peut conclure que le système est incompatible et il n'y a pas de solution.

EXERCICE 2

On s'intéresse dans cet exercice aux trois suites réelles (a_n), (b_n) et (c_n) définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = & 2a_n - b_n + c_n \\ b_{n+1} = & -4a_n + 7b_n - 6c_n \\ c_{n+1} = & -5a_n + 7b_n - 6c_n \end{cases}$$

avec $a_0 = 2$, $b_0 = 1$ et $c_0 = -1$.
Pour tout entier naturel n, on note :

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \quad \textbf{et} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 7 & -6 \\ -5 & 7 & -6 \end{pmatrix}$$

1. a. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = A\ X_n$$

On effectue le produit $A\ X_n$ et on retrouve X_{n+1}.

b. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n\ X_0$$

Récurrence immédiate.

2. Soit P la matrice définie par

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a. Calculer P^2 et déterminer $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$P^2 = \alpha P + \beta \mathrm{I}_3$$

On trouve

$$P^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

et $P^2 = \alpha P + \beta \mathrm{I}_3$ donne par identification

$$\alpha = 2 \ \text{ et } \ \beta = -1$$

b. En déduire que P est inversible, et déterminer P^{-1}.

On a $P^2 = 2P - \mathrm{I}_3$ donc $P(-P + 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{I}_3$; ainsi, par définition, P est inversible et

$$P^{-1} = -P + 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. a. Calculer $T = P^{-1}AP$ et en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^nP^{-1}$$

Par produit matriciel,

$$T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ensuite

$$T = P^{-1}AP \iff A = PTP^{-1}$$

Enfin, par récurrence immédiate

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^nP^{-1}$$

b. A l'aide du binôme de Newton dont on justifiera l'utilisation, calculer T^n.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_3 + N$$

avec

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme $\mathrm{I}_3 N = N \mathrm{I}_3$, on a, par le binôme de Newton matriciel :

$$T^n = (N + \mathrm{I}_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k$$

Par ailleurs,

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\forall k \geq 3,\ N^k = 0$$

donc

$$T^n = \mathrm{I}_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2$$

puis

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 3n - n^2 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c. En déduire A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Comme

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^nP^{-1}$$

par produit matriciel on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} n+1 & -n & n \\ n^2 - 5n & 1 + 7n - n^2 & n^2 - 7n \\ n^2 - 6n & 8n - n^2 & 1 - 8n + n^2 \end{pmatrix}$$

4. Donner l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4n+1 \\ 4n-1 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_n = 2 \\ b_n = 4n + 1 \\ c_n = 4n - 1 \end{cases}$$

EXERCICE 3

1. Montrer que

$$\forall x > 0,\ \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Soit f la fonction

$$f : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$$

Par composition et somme, f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} + \frac{\frac{-1}{x^2}}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = 0$$

On en déduit que f est constante sur $]0, +\infty[$.
Comme $f(1) = \mathrm{Arctan}(1) + \mathrm{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ on obtient

$$\forall x > 0,\ \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

2. Donner le développement limité de Arctan à l'ordre 3 au voisinage de 0.

$$\text{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)$$

3. Trouver alors trois réels a, b, c tels que

$$\text{Arctan}(x) \underset{x\to +\infty}{=} a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^3} + \circ\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

D'après la question précédente, on a :

$$\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to +\infty}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \circ\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

On a montré à la première question que

$$\forall x > 0, \quad \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$$

on en déduit que

$$\text{Arctan}(x) = \underset{x\to +\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \circ\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

EXERCICE 4

Soit a et b deux réels strictement positifs.

1. Donner le domaine de définition de

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^a\,(\ln(x)^b)}$$

Pour tout réel a la fonction $x \mapsto x^a$ est définie sur $]0, +\infty[$ donc $f(x)$ est définie sur $x > 0$ et $\ln(x) > 0$.
On en déduit le domaine de définition de f :

$$D_f =]1, +\infty[$$

2. Trouver les valeurs de $c \in \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) \underset{x\to +\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{x^c}\right)$$

Pour $x > 1$, $\dfrac{f(x)}{\frac{1}{x^c}} = \dfrac{x^{c-a}}{(\ln(x))^b}$.

Par croissances comparées, comme $b > 0$, on a $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{x^c}} = 0$ si, et seulement si $c \leq a$ et par suite

$$f(x) \underset{x\to +\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{x^c}\right) \Longleftrightarrow c \leq a$$

3. Donner un équivalent de $f(x)$ en 1.

On a : $\dfrac{1}{x^a} \underset{x\to 1}{\sim} 1$ et $\ln(1+h) \underset{h\to 0}{\sim} h$ donc $(\ln(1+h))^b \underset{h\to 0}{\sim} h^b$ et par suite, $(\ln(x))^b \underset{x\to 1}{\sim} (x-1)^b$.
Par quotient, on obtient :

$$f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{(x-1)^b}$$

EXERCICE 5

Soit f la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \end{array}$$

1. a. Montrer que f est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et que

$$\forall x \in [0,1],\ f''(x) = (x^2-1)f(x)$$

Par composition, f est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et

$$\forall x \in [0,1], \quad f'(x) = -x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{puis} \quad f''(x) = -\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = (x^2-1)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = (x^2-1)f(x)$$

b. En déduire les variations de la fonction f' sur $[0,1]$.
La fonction exponentielle étant strictement positive, on en déduit que

$$\forall x \in [0,1], \quad f''(x) = (x^2-1)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \leq 0$$

et par suite que la fonction f' est décroissante sur $[0,1]$.

c. Montrer que pour tous $\alpha, \beta \in [0,1]$ tels que $\alpha \leq \beta$, on a :

$$f'(\beta)(\beta-\alpha) \leq f(\beta) - f(\alpha) \leq f'(\alpha)(\beta-\alpha)$$

Pour $\alpha, \beta \in [0,1]$ tels que $\alpha < \beta$, on a f continue sur $[\alpha,\beta]$, dérivable sur $]\alpha,\beta[$ donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $\gamma \in]\alpha,\beta[$ tel que $f(\beta) - f(\alpha) = f'(\gamma)(\beta-\alpha)$.
Comme f est décroissante sur $[0,1]$, elle l'est sur $[\alpha,\beta]$ et on a $f'(\alpha) \geq f'(\gamma) \geq f'(\beta)$ d'où, puisque $\beta-\alpha > 0$:

$$f'(\beta)(\beta-\alpha) \leq f(\beta) - f(\alpha) \leq f'(\alpha)(\beta-\alpha)$$

L'encadrement reste vrai lorsque $\alpha = \beta$, tous les membres étant nuls.

2. Soit $a \in [0,1]$. On note T_a la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

a. Donner l'équation réduite $y = u(x)$ de T_a.

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

b. Montrer que :

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) \leq u(x)$$

On pourra distinguer les cas $0 \leq x \leq a < 1$ et $0 < a \leq x \leq 1$.
Pour $x \in [0,1]$, on a :

$$u(x) - f(x) = f'(a)(x-a) + f(a) - f(x)$$

$\leadsto$ Si $0 \leq x \leq a < 1$, alors en prenant $\alpha = x$ et $\beta = a$ dans la question précédente, on obtient :

$$f(a) - f(x) \geq f'(a)(a-x)$$

donc

$$u(x) - f(x) \geq 0$$

$\leadsto$ Si $0 < a \leq x \leq 1$, alors en prenant $\alpha = a$ et $\beta = x$ dans la question précédente, on obtient :

$$f(x) - f(a) \leq f'(a)(x-a)$$

donc

$$u(x) - f(x) \geq 0$$

Finalement,

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) \leq u(x)$$

c. Interpréter géométriquement ce résultat.
On déduit de la question précédente que la courbe de f sur $[0, 1]$ est située en dessous de T_a.

3. Soit $a, b \in [0, 1]$ tels que $a < b$. On note $D_{a,b}$ la droite passant par les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

a. Donner l'équation réduite $y = v(x)$ de $D_{a,b}$.

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

b. Montrer que

$$\exists c \in [a, b],\ f'(c) = v'(c)$$

f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

c'est-à-dire

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = v'(c)$$

c. Montrer que

$$\forall x \in [a, b],\ f(x) \geq v(x)$$

Soit h la fonction définie sur $[a, b]$ par

$$h(x) = f(x) - v(x)$$

Par somme h est dérivable sur $[a, b]$ et

$$\forall x \in [a, b], \quad h'(x) = f'(x) - v'(x)$$

v est une fonction affine et

$$\forall x \in [a, b], \quad v'(x) = v'(c) = f'(c)$$

On sait (question **1.b**) que f est décroissante sur $[0, 1]$ donc en particulier sur $[a, b]$.
On en déduit que

$$\forall x \in [a, c], \quad h'(x) = f'(x) - f'(c) \geq 0$$

donc h est croissante sur $[a, c]$ et

$$\forall x \in [c, b], \quad h'(x) = f'(x) - f'(c) \leq 0$$

donc h est décroissante sur $[c, b]$.
De plus $h(a) = f(a) - v(a) = 0$ et $h(b) = f(b) - v(b) = 0$.
Finalement, on en déduit que

$$\forall x \in [a, b], \quad h(x) \geq 0$$

ce qui équivaut à

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) \geq v(x)$$

d. Interpréter géométriquement ce résultat.

On déduit de la question précédente que sur $[a, b]$ la courbe de f est située au-dessus de $D_{a,b}$.