$\star$ Sup - St Joseph/ICAM Toulouse $\star$ - - 2022-2023 -

Math. - ES 1 -

vendredi 13 janvier 2023 - Durée 4 h

EXERCICE 1

Pour $z \in D = \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\}$, on pose

$$f(z) = \frac{1}{\overline{z} - \mathrm{i}}$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

1a. Déterminer la forme algébrique de $f(z)$ pour $z \in D$, à l'aide de $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$.

b. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in D$ tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.
En donner une interprétation géométrique simple.

c. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in D$ tels que $f(z) \in \mathbb{U}$, c'est-à-dire $|f(z)| = 1$.
En donner une interprétation géométrique simple.

2. Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

a. Montrer que $f(\tan(\theta)) = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(1 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}\right)$.

b. Montrer que le point d'affixe $f(\tan(\theta))$ est sur le cercle de centre C d'affixe $\frac{\mathrm{i}}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

3. Déterminer les points fixes de f, c'est-à-dire les nombres complexes $z \in D$ tels que $f(z) = z$.

4. Résoudre dans D l'équation

$$(E): \quad f(z) = -\overline{z} + \sqrt{3}$$

EXERCICE 2

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2, a désigne un nombre complexe qui **n'est pas** une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité, et on note pour tout complexe z :

$$P_n(z) = (az - 1)^n - z^n$$

1. Déterminer les racines de P_n, c'est-à-dire les nombres complexes z qui vérifient $P_n(z) = 0$.

2. Développer $P_n(z)$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note a_k le coefficient de z^k dans l'expression développée de $P_n(z)$.

3. On admet que le produit des racines de P_n est égal à $(-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

a. Montrer que

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(a - \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}\right) = a^n - 1$$

b. Démontrer que cette formule reste vraie pour tout complexe $a \in \mathbb{C}$.

c. En considérant $a = \mathrm{e}^{2i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, simplifier :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} - \theta\right)$$

EXERCICE 3

On rappelle que pour $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq p$, on a : $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Partie I : somme des coefficients successifs d'une colonne du triangle de Pascal

1. En remarquant que pour k et n entiers tels que $0 \leq k < n$ on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}$$

déterminer pour $k \in \mathbb{N}$ et pour $i \geq k$ une expression de $\displaystyle\sum_{j=k}^{i} \binom{j}{k}$ à l'aide d'un seul coefficient binomial.

2. Déterminer trois entiers a, b et c tels que pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $j \geq 3$:

$$j^3 = a\binom{j}{3} + b\binom{j}{2} + c\binom{j}{1}$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Partie II : Formule d'inversion de Pascal

On considère dans cette partie une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fixée et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$$

Le but de cette partie est de donner une expression de u_n en fonction des a_k.

1. Vérifier que pour k, n et p dans $\mathbb{N}$ tels que $k \leq p \leq n$ on a :

$$\binom{n+1}{p}\binom{p}{k} = \binom{n+1}{k}\binom{n+1-k}{p-k}$$

2. Montrer que si k et n sont deux entiers naturels tels que $k \leq n$ alors

$$\sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n+1-k}{j} = (-1)^{n-k}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de a_{n+1} et des u_k pour $0 \leq k \leq n$.

b. Prouver par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$$

4. **Une application :** on considère la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_{n+1} = (n+1)d_n + (-1)^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$$

b. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

PROBLÈME

Dans tout le problème on pourra utiliser sans justification la limite suivante :

$$\forall q \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$$

On pose, pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$R_n(t) = \mathrm{e}^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$$

PARTIE I

1a. Montrer que R_n est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y'(t) - y(t) = \frac{t^n}{n!} \qquad (E)$$

b. Donner la solution générale de l'équation homogène (E_0) associée à (E).

c. Résoudre (E) en utilisant une méthode de variation de la constante (on exprimera les solutions à l'aide d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.)

d. En déduire que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad R_n(t) = \mathrm{e}^t \int_0^t \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

e. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad 0 \leq R_n(t) \leq \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^t$$

f. En déduire que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} = \mathrm{e}^t$$

2. On considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n!}$$

a. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

b. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \mathrm{e}$$

PARTIE II

On considère la fonction g définie sur $[0;1]$ par :

$$g(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]0,1], \quad g(x) = x\ln(x)$$

On remarquera que g est continue sur $[0;1]$.

1. Dresser le tableau de variations complet de g et en déduire celui de $-g$.

2. Justifier que l'intervalle $\left[0;\mathrm{e}^{-1}\right]$ est stable par $-g$.

3. Déterminer le signe de $-g(x) - x$ sur $\left[0;\mathrm{e}^{-1}\right]$.

4. On définit la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$t_0 \in \left]\frac{1}{3\mathrm{e}};\frac{1}{\mathrm{e}}\right[\qquad \text{et} \qquad \forall n\in\mathbb{N}, t_{n+1} = -g(t_n)$$

a. Montrer par récurrence que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0 \leq t_n \leq \mathrm{e}^{-1}$$

b. Montrer par récurrence que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad t_n \leq t_{n+1}$$

5. En déduire que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.

PARTIE III

On pose :

$$\forall x\in[0;1], x^{-x} = \mathrm{e}^{-g(x)} \qquad \text{et} \qquad I = \int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x$$

On rappelle que g est continue sur $[0;1]$, et ainsi l'intégrale I est bien définie.

1. Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad I = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^1 (g(x))^k\mathrm{d}x + \int_0^1 R_n((-g(x))\mathrm{d}x$$

2. Montrer que :

$$0 \leq \int_0^1 R_n(-g(x))\mathrm{d}x \leq \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}}{\mathrm{e}^{n+1}}$$

3. Pour $p,q\in\mathbb{N}$, on pose :

$$I_{p,q} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 x^p\ln^q(x)\mathrm{d}x$$

et on admet que $I_{p,q}$ est bien définie.

a. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\forall p\in\mathbb{N}, \forall q\in\mathbb{N}^*, I_{p,q} = -\frac{q}{p+1}I_{p,q-1}$$

b. Exprimer $I_{p,q}$ en fonction de p et q.

4. Montrer enfin que :

$$I = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^k}$$

Fin de l'énoncé