Math. - ES 1 - CORRECTION

EXERCICE 1

Pour $z \in D = \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\}$, on pose
$$f(z) = \frac{1}{\overline{z} - \mathrm{i}}$$
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

1a. Déterminer la forme algébrique de $f(z)$ pour $z \in D$, à l'aide de $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$.
Si on note $z = x + \mathrm{i}y$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; -1)\}$, on a : $f(z) = \dfrac{x}{x^2 + (1+y)^2} + \mathrm{i}\dfrac{1+y}{x^2 + (1+y)^2}$.

b. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in D$ tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.
Avec les notations précédentes : $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1 + y = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = -1$.
En donner une interprétation géométrique simple.
Ce sont les affixes des points de la droite d'équation $y = -1$, privée du point d'affixe $-\mathrm{i}$.

c. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in D$ tels que $f(z) \in \mathbb{U}$, c'est-à-dire $|f(z)| = 1$.
$|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + (1+y)^2}} = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = 1$
En donner une interprétation géométrique simple.
Ce sont les affixes des points du cercle de centre le point d'affixe $-\mathrm{i}$ et de rayon 1.

2. Soit $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

a. Montrer que $f(\tan(\theta)) = \dfrac{\mathrm{i}}{2}\left(1 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}\right)$.
$f(\tan(\theta)) = \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta) - \mathrm{i}\cos(\theta)} = \dfrac{\cos(\theta)\mathrm{i}}{\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)} = \dfrac{\cos(\theta)\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{i} = \dfrac{\mathrm{i}}{2}\left(1 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}\right)$.

b. Montrer que le point d'affixe $f(\tan(\theta))$ est sur le cercle de centre C d'affixe $\dfrac{\mathrm{i}}{2}$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.
$\left|f(\tan(\theta)) - \dfrac{\mathrm{i}}{2}\right| = \dfrac{1}{2}\left|\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}\right| = \dfrac{1}{2}$.
Donc le point d'affixe $f(\tan(\theta))$ est sur le cercle de centre C et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

3. Déterminer les points fixes de f, c'est-à-dire les nombres complexes $z \in D$ tels que $f(z) = z$.
$f(z) = z \Leftrightarrow z\overline{z} - \mathrm{i}z = 1$. En notant $z = x + \mathrm{i}y$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; -1)\}$, on a :
$$x^2 + y^2 + y - x\mathrm{i} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

4. Résoudre dans D l'équation
$$(E) : \quad f(z) = -\overline{z} + \sqrt{3}$$
z est solution de (E) si, et seulement si $1 = -\left(\overline{z}\right)^2 + \mathrm{i}\overline{z} + \sqrt{3}\overline{z} - \sqrt{3}\mathrm{i}$.
Ainsi $\overline{z}$ est racine du polynôme $P(z) = z^2 - \left(\mathrm{i} + \sqrt{3}\right)z + \left(1 + \sqrt{3}\mathrm{i}\right)$.
On a : $\Delta = -2 - 2\sqrt{3}\mathrm{i} = 4\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} = \left(2\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}\right)^2$.
On obtient donc : $\overline{z} = \dfrac{\mathrm{i} + \sqrt{3} \pm 2\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}}{2} = \dfrac{\mathrm{i} + \sqrt{3} \pm (1 - \sqrt{3}\mathrm{i})}{2}$.
Finalement, les solutions de (E) sont : $\dfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3} + \left(\sqrt{3} - 1\right)\mathrm{i}\right)$ et $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3} - 1 - \left(1 + \sqrt{3}\right)\mathrm{i}\right)$.

EXERCICE 2

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2, a désigne un nombre complexe qui **n'est pas** une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité, et on note pour tout complexe z :

$$P_n(z) = (az-1)^n - z^n$$

1. Déterminer les racines de P_n, c'est-à-dire les nombres complexes z qui vérifient $P_n(z) = 0$.
$P_n(z) = 0 \Leftrightarrow (az-1)^n = z^n$
$z = 0$ n'est clairement pas solution, on a donc :
$P_n(z) = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{az-1}{z}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!], \dfrac{az-1}{z} = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!], \left(a - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) z = 1$
a n'est pas une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité, on en déduit donc l'ensemble des racines de P_n :
$\left\{\dfrac{1}{a - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}}, k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$

2. Développer $P_n(z)$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
$\forall z \in D, \quad P_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a^k z^k - z^n.$
Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note a_k le coefficient de z^k dans l'expression développée de $P_n(z)$.
$\begin{cases} a_n = a^n - 1 \\ a_k = \dbinom{n}{k} (-1)^{n-k} a^k \quad \text{pour } k \in [\![0, n-1]\!] \end{cases}$

3. On admet que le produit des racines de P_n est égal à $(-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$.

a. Montrer que

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(a - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = a^n - 1$$

D'après les questions précédentes, on a : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}} = (-1)^n \frac{(-1)^n}{a^n - 1} = \frac{1}{a^n - 1}$
d'où le résultat en inversant, les dénominateurs étant non nuls.

b. Démontrer que cette formule reste vraie pour tout complexe $a \in \mathbb{C}$.
Le résultat précédent a été établi pour les nombres complexes autres que les racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité.
Si $a = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ où $k \in [\![0, n-1]\!]$ alors $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(a - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = 0$ car l'un des facteurs est nul, et $a^n - 1 = 0$ car a est une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité.
Ainsi l'égalité précédente reste vraie, les deux membres étant nuls.

c. En considérant $a = \mathrm{e}^{2i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, simplifier :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} - \theta\right)$$

D'après la formule de l'angle moitié, on a :
$\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{2i\theta} - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(2i\mathrm{e}^{i\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)} \sin\left(\theta - \frac{k\pi}{n}\right)\right) = (2i)^n \mathrm{e}^{in\theta} \prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta - \frac{k\pi}{n}\right)$
Par ailleurs, on a : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k} = \mathrm{e}^{\frac{i\pi(n-1)n}{2n}} = \mathrm{e}^{\frac{i\pi(n-1)}{2}} = i^{n-1}.$
Les résultats précédents donnent :
$\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} - \theta\right) = \prod_{k=0}^{n-1} -\sin\left(\theta - \frac{k\pi}{n}\right) = (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{2in\theta} - 1}{2^n \mathrm{e}^{in\theta} (-1)^{n-1} i} = -\frac{2i\mathrm{e}^{in\theta} \sin(n\theta)}{2^n \mathrm{e}^{in\theta} i} = -\frac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}}$

EXERCICE 3

On rappelle que pour $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq p$, on a : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Partie I : somme des coefficients successifs d'une colonne du triangle de Pascal

1. En remarquant que pour k et n entiers tels que $0 \leq k < n$ on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}$$

déterminer pour $k \in \mathbb{N}$ et pour $i \geq k$ une expression de $\sum_{j=k}^{i} \binom{j}{k}$ à l'aide d'un seul coefficient binomial.

La formule donnée vient de la formule de Pascal : pour k et n entiers naturels tels que $k < n$: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

On a donc pour $i = k$, $\sum_{j=k}^{i} \binom{j}{k} = \binom{k+1}{k+1} = 1$, et pour $i > k$:

$\sum_{j=k}^{i} \binom{j}{k} = \binom{k}{k} + \sum_{j=k+1}^{i} \left(\binom{j+1}{k+1} - \binom{j}{k+1} \right) = 1 + \sum_{j=k+1}^{i} \binom{j+1}{k+1} - \sum_{j=k+1}^{i} \binom{j}{k+1}$

$= 1 + \sum_{j=k+2}^{i+1} \binom{j}{k+1} - \sum_{j=k+1}^{i} \binom{j}{k+1} = 1 + \binom{i+1}{k+1} - 1 = \binom{i+1}{k+1}$, par télescopage.

2. Déterminer trois entiers a, b et c tels que pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $j \geq 3$:

$$j^3 = a\binom{j}{3} + b\binom{j}{2} + c\binom{j}{1}$$

$a\binom{j}{3} + b\binom{j}{2} + c\binom{j}{1} = a\frac{j(j-1)(j-2)}{6} + b\frac{j(j-1)}{2} + cj = \frac{aj^3 + 3(b-a)j^2 + (2a - 3b + 6c)j}{6}$

Pour que cette égalité soit égale à j^3 pour tout entier $j \geq 3$, il faut et il suffit d'avoir :

$\begin{cases} a = 6 \\ 3(b-a) = 0 \\ 2a - 3b + 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 6 \\ c = 1 \end{cases}$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

D'après ce qui précède, on a :

$\sum_{j=1}^{n} j^3 = 1 + 2^3 + \sum_{j=3}^{n} j^3 = 9 + 6\sum_{j=3}^{n} \binom{j}{3} + 6\sum_{j=3}^{n} \binom{j}{2} + \sum_{j=3}^{n} \binom{j}{1} =$

$= 9 + 6\binom{n+1}{4} + 6\left(\binom{n+1}{3} - \binom{2}{2} \right) + \binom{n+1}{2} - \binom{2}{1} - \binom{1}{1}$

$= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} + (n+1)n(n-1) + \frac{(n+1)n}{2} = (n+1)n\frac{(n-1)(n-2) + 4(n-1) + 2}{4} =$

$(n+1)n\frac{n^2+n}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$

Partie II : Formule d'inversion de Pascal

On considère dans cette partie une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fixée et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$$

Le but de cette partie est de donner une expression de u_n en fonction des a_k.

1. Vérifier que pour k, n et p dans $\mathbb{N}$ tels que $k \leq p \leq n$ on a :

$$\binom{n+1}{p}\binom{p}{k} = \binom{n+1}{k}\binom{n+1-k}{p-k}$$

Soient k, n, p trois entiers tels que $k \leq p \leq n$. Alors :
$\binom{n+1}{p}\binom{p}{k} = \frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!}\frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!(p-k)!k!}$;
$\binom{n+1}{k}\binom{n+1-k}{p-k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\frac{(n+1-k)!}{(p-k)!(n+1-k-(p-k))!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!(p-k)!k!}$
d'où l'égalité.

2. Montrer que si k et n sont deux entiers naturels tels que $k \leq n$ alors

$$\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^j\binom{n+1-k}{j} = (-1)^{n-k}$$

D'après la formule du binôme de Newton, on a :
$\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^j\binom{n+1-k}{j} = \sum_{j=0}^{n+1-k}(-1)^j\binom{n+1-k}{j} - (-1)^{n-k+1}\binom{n+1-k}{n+1-k}$
$= (1+(-1))^{n+1-k} - (-1)^{n+1-k} = (-1)^{n-k}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de a_{n+1} et des u_k pour $0 \leq k \leq n$.

$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}u_k + \binom{n+1}{n+1}u_{n+1}$ d'où $u_{n+1} = a_{n+1} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}u_k$

b. Prouver par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}a_k$$

Prouvons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: $u_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}a_k$.

Initialisation : pour $n = 0$, on a : $a_0 = \sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}u_k = \binom{0}{0}u_0 = u_0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ soit vraie. Alors on a :

$u_{n+1} = a_{n+1} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}u_k = a_{n+1} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}a_j$

$= a_{n+1} - \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{n+1}{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}a_j = a_{n+1} - \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}\binom{n+1}{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}a_j$

$\underbrace{=}_{\mathbf{1}} a_{n+1} - \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}\binom{n+1}{j}\binom{n+1-j}{k-j}(-1)^{k-j}a_j = a_{n+1} - \sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j}a_j\sum_{i=0}^{n-j}\binom{n+1-j}{i}(-1)^i$

$\underbrace{=}_{\mathbf{2}} a_{n+1} - \sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j}a_j(-1)^{n-j} = (-1)^{n+1-(n+1)}\binom{n+1}{n+1}a_{n+1} + \sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j}a_j$

$= \sum_{j=0}^{n+1}(-1)^{n+1-j}\binom{n+1}{j}a_j$

donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence, on en déduit que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Une application : on considère la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_{n+1} = (n+1)d_n + (-1)^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$$

Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{H}(n)$: $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.

Initialisation : pour $n = 0$, on a : $0! = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} d_k = d_0 = 1$ donc $\mathscr{H}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose $\mathscr{H}(n)$ vraie. Alors :

$(n+1)! = (n+1)n! = (n+1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k = \sum_{k=0}^{n}(n+1)\binom{n}{k} d_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}(k+1)d_k$

$= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}\left(d_{k+1} + (-1)^k\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} d_{k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}(-1)^k$

$= \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} d_i + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i}(-1)^{i-1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} d_i - d_0 - \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i}(-1)^i + 1$

$= \displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} d_i - (1+(-1))^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} d_i$

donc $\mathscr{H}(n+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence, on en déduit que $\mathscr{H}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

En appliquant les résultats démontrés précédemment, en prenant $u_k = d_k$ et $a_n = n!$, on obtient :

pour tout $n \in \mathbb{N}, d_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}k! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}(-1)^{n-k} \underbrace{=}_{i=n-k} n!\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$,

d'où le résultat.

PROBLÈME

Dans tout le problème on pourra utiliser sans justification la limite suivante :

$$\forall q \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$$

On pose, pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$R_n(t) = \mathrm{e}^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$$

PARTIE I

1a. Montrer que R_n est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y'(t) - y(t) = \frac{t^n}{n!} \qquad (E)$$

R_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $R_n'(t) = \mathrm{e}^t - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = \mathrm{e}^t - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}$.

On a donc $R_n'(t) - R(t) = \mathrm{e}^t - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^t}{k!} - \mathrm{e}^t + \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} = \frac{t^n}{n!}$ donc R_n est solution de (E).

b. Donner la solution générale de l'équation homogène (E_0) associée à (E).
$S_{E_0} = \left\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi(t) = \lambda \mathrm{e}^t, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

c. Résoudre (E) en utilisant une méthode de variation de la constante (on exprimera les solutions à l'aide d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.)
Soit λ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
$y_p : t \mapsto \lambda(t)\mathrm{e}^t$ est solution de $(E) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \lambda'(t)\mathrm{e}^t = \dfrac{t^n}{n!} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \lambda'(t) = \mathrm{e}^{-t}\dfrac{t^n}{n!}$.
On a donc $y_p : t \mapsto \mathrm{e}^t \displaystyle\int_0^t \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ une solution de E.
On en déduit : $S_E = \left\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi(t) = \lambda \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t \displaystyle\int_0^t \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

d. En déduire que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad R_n(t) = \mathrm{e}^t \int_0^t \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$R_n \in S_E$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}, R_n(t) = \lambda \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t \displaystyle\int_0^t \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

Comme $R(0) = 0$, on a : $0 = \lambda + 0$ d'où $\lambda = 0$ et $\forall t \in \mathbb{R}, R_n(t) = \mathrm{e}^t \displaystyle\int_0^t \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

e. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad 0 \leq R_n(t) \leq \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^t$$

$\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in [0, t], \quad 0 \leq \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} \leq \dfrac{x^n}{n!}$ donc $\quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad 0 \leq \displaystyle\int_0^t \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \leq \int_0^t \frac{x^n}{n!}\mathrm{d}x$

Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad 0 \leq R_n(t) \leq \mathrm{e}^t \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!}$

f. En déduire que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} = \mathrm{e}^t$$

$\forall t \in \mathbb{R}^+, \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^t = 0$ donc par encadrement, $\forall t \in \mathbb{R}^+, \displaystyle\lim_{n \to +\infty} R_n(t) = 0$.

Enfin, $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} = \mathrm{e}^t - R_n(t) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^t$, donc $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} = \mathrm{e}^t$.

2. On considère les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n!}$$

a. Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.
$\forall n \geq 1, \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0 \quad$ et $\quad v_{n+1} - v_n = \dfrac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$
donc (u_n) est strictement croissante et (v_n) est strictement décroissante.
$\forall n \geq 1, \quad v_n - u_n = \dfrac{1}{n \cdot n!}$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.
Ainsi, (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes.

b. En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = \mathrm{e}$$

Le théorème des suites adjacentes donne la convergence vers la même limite des suites (u_n) et (v_n).

D'après le **1.f**, pour $t = 1$ on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \lim_{n \to +\infty} u_n = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = \mathrm{e}$.

PARTIE II

On considère la fonction g définie sur $[0;1]$ par :

$$g(0)=0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]0,1], \quad g(x)=x\ln(x)$$

On remarquera que g continue sur $[0;1]$.

1. Dresser le tableau de variations complet de g et en déduire celui de $-g$.

Par produit, g est dérivable sur $]0;1]$ et $\forall x \in]0,1], g'(x)=\ln(x)+1$.
Ainsi $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \mathrm{e}^{-1}$.
On obtient les tableaux de variations suivants :

x	0		e^{-1}		1
$g'(x)$		-	0	+	
g	0	↘	$-\mathrm{e}^{-1}$	↗	0

x	0		e^{-1}		1
$-g$	0	↗	e^{-1}	↘	0

2. Justifier que l'intervalle $\left[0;\mathrm{e}^{-1}\right]$ est stable par $-g$.

Le tableau de variations ci-dessus donne immédiatement la stabilité de l'intervalle $\left[0;\mathrm{e}^{-1}\right]$ par $-g$.

3. Déterminer le signe de $-g(x)-x$ sur $\left[0;\mathrm{e}^{-1}\right]$.

Pour $x \in [0;1]$, on pose $h(x)=-g(x)-x$.
h est continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1]$ et $\forall x \in]0;1], h'(x)=-g'(x)-1=-\ln(x)$.
Ainsi h est croissante sur $]0;1]$ et comme elle est continue sur $[0;1], \forall x \in [0;\mathrm{e}^{-1}], h(x) \geq h(0)=0$.
On en déduit que $\forall x \in [0;\mathrm{e}^{-1}], -g(x)-x \geq 0$.

4. On définit la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$t_0 \in \left]\frac{1}{3\mathrm{e}};\frac{1}{\mathrm{e}}\right[\qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1}=-g(t_n)$$

a. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq t_n \leq \mathrm{e}^{-1}$$

Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n) : 0 \leq t_n \leq \mathrm{e}^{-1}$.
Initialisation : $0 < \dfrac{1}{3\mathrm{e}} < t_0 < \mathrm{e}^{-1}$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire $t_n \in [0;\mathrm{e}^{-1}]$. D'après la question **2**, on a $-g(t_n) \in [0;\mathrm{e}^{-1}]$ donc $t_{n+1} \in [0;\mathrm{e}^{-1}]$ et $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n \leq t_{n+1}$$

Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{H}(n) : t_n \leq t_{n+1}$.
Initialisation : D'après la question **3**, $-g(t_0)-t_0 \geq 0$ c'est-à-dire $t_1 \geq t_0$ donc $\mathscr{H}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{H}(n)$ vraie, c'est-à-dire $t_n \leq t_{n+1}$. D'après la question **1**, $-g$ est croissante sur $[0,\mathrm{e}^{-1}]$ donc $-g(t_n) \leq -g(t_{n+1})$ c'est-à-dire $t_{n+1} \leq t_{n+2}$ et $\mathscr{H}(n+1)$ est vraie.
Par principe de récurrence, $\mathscr{H}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. En déduire que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.
D'après la question précédente, (t_n) est croissante majorée donc elle converge.
Comme $-g$ est continue sur $[0,\mathrm{e}^{-1}]$, (t_n) converge vers un point fixe de $-g$ dans $[0;\mathrm{e}^{-1}]$.
$-g(x) = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x(1+\ln x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \mathrm{e}^{-1}$.
Comme (t_n) est croissante avec $t_0 > 0$, on en déduit que (t_n) converge vers e^{-1}.

PARTIE III

On pose :

$$\forall x \in [0;1], x^{-x} = \mathrm{e}^{-g(x)} \qquad \text{et} \qquad I = \int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x$$

On rappelle que g est continue sur $[0;1]$, et ainsi l'intégrale I est bien définie.

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^1 (g(x))^k \mathrm{d}x + \int_0^1 R_n((-g(x))\mathrm{d}x$$

D'après la **Partie I**, $\forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^t = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} + R_n(t)$ donc $\forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{-g(t)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}(g(t))^k + R_n(-g(t))$
puis, par linéarité de l'intégrale : $I = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^1 (g(x))^k\,\mathrm{d}x + \int_0^1 R_n(-g(x))\mathrm{d}x$.

2. Montrer que :

$$0 \leq \int_0^1 R_n(-g(x))\mathrm{d}x \leq \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}}{\mathrm{e}^{n+1}}$$

$\forall x \in [0;1], -g(x) \geq 0$ donc d'après **I.1e** : $\forall x \in [0;1], 0 \leq R_n(-g(x)) \leq \frac{(-g(x))^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-g(x)}$
et d'après **II.1** : $\forall x \in [0;1], 0 \leq -g(x) \leq \mathrm{e}^{-1}$ donc $\forall x \in [0;1], 0 \leq R_n(-g(x)) \leq \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-1}}}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}$
Enfin, puisque $(n+1)! \geq 1$ on obtient : $0 \leq \int_0^1 R_n(-g(x))\mathrm{d}x \leq \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-1}}}{\mathrm{e}^{n+1}}$

3. Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_{p,q} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 x^p \ln^q(x)\mathrm{d}x$$

et on admet que $I_{p,q}$ est bien définie.

a. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*, I_{p,q} = -\frac{q}{p+1}I_{p,q-1}$$

Soient $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On note $\int_\varepsilon^1 x^p \ln^q(x)\mathrm{d}x = I_{p,q}(\varepsilon)$.

On pose $\left|\begin{array}{lcl} u' : x \mapsto x^p & \Leftarrow & u : x \mapsto \dfrac{x^{p+1}}{p+1} \\ v : x \mapsto \ln^q(x) & \Rightarrow & v' : x \mapsto q\dfrac{1}{x}\ln^{q-1}(x) \end{array}\right.$

u et v sont des fonctions de classe C^1 sur $[\varepsilon;1]$ donc le théorème d'intégration par parties donne :
$I_{p,q}(\varepsilon) = \left[\frac{1}{p+1}x^{p+1}\ln^q(x)\right]_\varepsilon^1 - \frac{q}{p+1}I_{p,q-1}(\varepsilon)$.
Le passage à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ donne avec le théorème des croissances comparées :
$I_{p,q} = -\frac{q}{p+1}I_{p,q-1}$.

b. Exprimer $I_{p,q}$ en fonction de p et q.

$\displaystyle\int_\varepsilon^1 x^p \ln^q(x)\mathrm{d}x$ est l'intégrale d'une fonction négative sur l'intervalle d'intégration.

Pour $0 < \varepsilon \leq \dfrac{1}{2}$ on a $I_{p,q}(\varepsilon) \leq \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p \ln^q(x)\mathrm{d}x < 0$.

Par passage à la limite quand ε tend vers 0, on a $I_{p,q} < 0$ en particulier, $I_{p,q} \neq 0$.

On déduit de ce qui précède que :

$\displaystyle\prod_{k=1}^{q} \frac{I_{p,k}}{I_{p,k-1}} = \prod_{k=1}^{q} \frac{-k}{p+1}$ ce qui donne par télescopage : $I_{p,q} = (-1)^q \dfrac{q!}{(p+1)^q} I_{p,0}$.

De plus, $I_{p,0}(\varepsilon) = \displaystyle\int_\varepsilon^1 x^p \mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}(1-\varepsilon^{p+1})$ donc $I_{p,0} = \dfrac{1}{p+1}$ puis finalement :

$\forall p, q \in \mathbb{N}, \quad I_{p,q} = \dfrac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}$

4. Montrer enfin que :

$$I = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^k}$$

On a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{-1}\right)^n = 0$, donc d'après **2.**, par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 R_n(-g(x))\mathrm{d}x = 0$.

D'après **3.b**, $\displaystyle\int_0^1 (g(x))^k \,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x\ln(x))^k \,\mathrm{d}x = I_{k,k} = \frac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}}$

Ainsi, d'après **1.**, $I = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(-1)^k k!}{(1+k)^{1+k}} + \int_0^1 R_n(-g(x))\mathrm{d}x$ c'est-à-dire

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^k} = I - \int_0^1 R_n(-g(x))\mathrm{d}x$.

Par opérations sur le limites, on obtient finalement, $I = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^k}$