Math. - ES 2 - CORRECTION

EXERCICE 1

On considère l'application u définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$u\left((x,y,z)\right) = (3y-2z; -6x+9y-4z; -6x+6y-z)$$

On pose : $p = 3\,\mathrm{Id}_3 - u$, $\quad q = u - 2\,\mathrm{Id}_3$, $\quad F = \mathrm{Ker}(p)$, $\quad$ et $\quad G = \mathrm{Ker}(q)$
où Id_3 désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

1a. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et qu'il vérifie

$$u^2 - 5\,u + 6\,\mathrm{Id}_3 = 0$$

On a clairement, $\forall\left(\lambda, (a,b,c), (x,y,z)\right) \in \mathbb{R}\times\left(\mathbb{R}^3\right)^2$, $u\left(\lambda(a,b,c)+(x,y,z)\right) = \lambda u((a;b;c)) + u((x,y,z))$.

De plus, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, u(u(x,y,z))) = u\left((3y-2z; -6x+9y-4z; -6x+6y-z)\right) = (a;b;c)$
où : $a = 3(-6x+9y-4z) - 2(-6x+6y-z) = -6x+15y-10z$,
û $b = -6(3y-2z) + 9(-6x+9y-4z) - 4(-6x+6y-z) = -30x+39y+20z$
et $c = -6(3y-2z) + 6(-6x+9y-4z) - (-6x+6y-z) = -30x+30y-11z$
On obtient $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:
$u(u((x,y,z))) - 5u((x,y,z)) + 6(x,y,z) = (a;b;c) + (6x-15y+10z; 30x-39y-20z; 30x-30y+11z) = (0,0,0)$
On a donc bien $u^2 - 5\,u + 6\,\mathrm{Id}_3 = 0$

b. En déduire que u est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, et expliciter $u^{-1}\left((x,y,z)\right)$.
La question précédente donne : $u \circ \left(\dfrac{1}{6}(5\mathrm{Id}_3 - u)\right) = \mathrm{Id}_3$
donc $u \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^3)$ et $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:
$u^{-1}((x,y,z)) = \dfrac{1}{6}\left((5x,5y,5z) - (3y-2z; -6x+9y-4z; -6x+6y-z)\right) =$
$\left(\dfrac{5}{6}x - \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{3}z; x - \dfrac{2}{3}y + \dfrac{2}{3}z; x - y + z\right)$

2a. Montrer que

$$u \circ q = q \circ u = 3\,q \qquad \text{et} \qquad u \circ p = p \circ u = 2p$$

On remarque tout d'abord que p et q étant des combinaisons linéaires de puissances de u elles commutent avec u. En utilisant le résultat de la question **1.a**, on a :
$u \circ q = u \circ (u - 2\mathrm{Id}_3) = u^2 - 2u = 5u - 6\mathrm{Id}_3 - 2u = 3u - 6\mathrm{Id}_3 = 3q = q \circ u$
$u \circ p = u \circ (3\mathrm{Id}_3 - u) = 3u - u^2 = 3u - 5u + 6\mathrm{Id}_3 = -2u + 6\mathrm{Id}_3 = 2p = p \circ u$

b. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u^n = 3^n q + 2^n p$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $H_n : u^n = 3^n q + 2^n p$
▷ $p + q = \mathrm{Id}_3$ donc H_0 est vérifiée.
▷ Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose H_n vérifiée. On a, par linéarité de u :
$u^{n+1} = u \circ u^n = u \circ (3^n q + 2^n p) = 3^n u \circ q + 2^n u \circ p = 3^n(3q) + 2^n(2p) = 3^{n+1}q + 2^{n+1}p$
Ainsi H_{n+1} est vérifiée.
Par principe de récurrence, H_n est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. Vérifier que cette relation est aussi vraie pour $n = -1$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad u^n = 3^n q + 2^n p$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H'_n : u^{-n} = 3^{-n}q + 2^{-n}p$.

▷ D'après la question **1.b**, on a : $u^{-1} = \frac{5}{6}\mathrm{Id}_3 - \frac{1}{6}u = \frac{1}{3}(u - 2\mathrm{Id}_3) + \frac{1}{2}(3\mathrm{Id}_3 - u)$ donc la propriété H'_n est vraie pour $n = 1$ (et la propriété H_n est donc vraie pour $n = -1$).

▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose H'_n vraie.

On a : $u \circ q = 3q$ donc $\frac{1}{3}q = u^{-1} \circ q$ et $u \circ p = 2p$ donc $\frac{1}{2}p = u^{-1} \circ p$, d'où :

$u^{-(n+1)} = u^{-1} \circ u^{-n} = u^{-1} \circ \left(3^{-n}q + 2^{-n}p\right) = 3^{-n}u^{-1} \circ q + 2^{-n}u^{-1} \circ p = 3^{-n}\left(\frac{1}{3}q\right) + 2^{-n}\left(\frac{1}{2}p\right) = 3^{-(n+1)}q + 2^{-(n+1)}p$

Ainsi H'_{n+1} est vérifiée

Par principe de récurrence, H'_n est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et par suite, H_n est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

3a. Montrer que F est un plan vectoriel, que G est une droite vectorielle et que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

$(x, y, z) \in F \Leftrightarrow (3y - 2z; -6x + 9y - 4z; -6x + 6y - z) = (3x, 3y, 3z) \Leftrightarrow 3x - 3y + 2z = 0$

On a donc $F = \mathrm{Vect}\,\{(1, 1, 0), (-2, 0, 3)\}$;

$(x, y, z) \in G \Leftrightarrow (3y - 2z; -6x + 9y - 4z; -6x + 6y - z) = (2x, 2y, 2z) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 2z = 0 \\ 6x - 7y + 4z = 0 \\ 6x - 6y + 3z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

On a donc $G = \mathrm{Vect}\,\{(1, 2, 2)\}$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrice de rang 3.

Les vecteurs des bases de F et G réunis forment donc une famille libre de cardinal 3, on en déduit que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

b. Montrer que p et q sont des projecteurs et que $p \circ q = q \circ p = 0$

On a : $p \circ p = 9\mathrm{Id}_3 - 6u + u^2 = 9\mathrm{Id}_3 - 6u + 5u - 6\mathrm{Id}_3 = 3\mathrm{Id}_3 - u = p$;

$q \circ q = 4\mathrm{Id}_3 - 4u + u^2 = 4\mathrm{Id}_3 - 4u + 5u - 6\mathrm{Id}_3 = u - 2\mathrm{Id}_3 = q$.

On en déduit que p et q sont des projecteurs.

De plus, p et q étant des combinaisons linéaires de puissances de u ils commutent, et on a :

$p \circ q = -6\mathrm{Id}_3 + 5u - u^2 = -6\mathrm{Id}_3 + 5u - 5u + 6\mathrm{Id}_3 = 0$.

c. Montrer que p est la projection sur G parallèlement à F et que q est la projection sur F parallèlement à G.

On sait que p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$ et que $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = \mathbb{R}^3$.

Comme $q \circ p = 0$, on en déduit que $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$. De plus, F et G étant supplémentaires, de même que F et $\mathrm{Im}(p)$ on en déduit que $\dim(G) = \dim(\mathrm{Im}(p))$ et par suite que $\mathrm{Im}(p) = G$.

On démontre de même que q est la projection sur F parallèlement à G.

4. On considère trois suites $(x_n), (y_n)$ et (z_n) vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3y_n - 2z_n \\ y_{n+1} = -6x_n + 9y_n - 4z_n \\ z_{n+1} = -6x_n + 6y_n - z_n \end{cases}$$

avec x_0, y_0 et z_0 dans $\mathbb{R}$. Exprimer x_n, y_n et z_n en fonction de x_0, y_0, z_0 et n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note, pour $n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -6 & 9 & -4 \\ -6 & 6 & -1 \end{pmatrix}$. On a pour $n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.
On remarque de A est la matrice de u dans la base canonique, donc pour $n \in \mathbb{N}, A^n$ est la matrice de u^n dans la base canonique.
Une récurrence immédiate donne pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.
D'après la question **2.b**, on a $A^n = 3^n(A - 2\mathrm{I}_3) + 2^n(A - 2\mathrm{I}_3)$ donc on obtient :
$X_n = \begin{pmatrix} -2\times 3^n + 3\times 2^n & 3\times 3^n - 3\times 2^n & -2\times 3^n + 2\times 2^n \\ -6\times 3^n + 6\times 2^n & 7\times 3^n - 6\times 2^n & -4\times 3^n + 4\times 2^n \\ -6\times 3^n + 6\times 2^n & 6\times 3^n - 6\times 2^n & -3\times 3^n + 4\times 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$.
Finalement, pour $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} x_n = (-2\times 3^n + 3\times 2^n)x_0 + (3^{n+1} - 3\times 2^n)y_0 + (-2\times 3^n + 2^{n+1})z_0 \\ y_n = (-2\times 3^{n+1} + 3\times 2^{n+1})x_0 + (7\times 3^n - 3\times 2^{n+1})y_0 + (-4\times 3^n + 2^{n+2})z_0 \\ z_n = (-2\times 3^{n+1})x_0 + (3\times 2^{n+1})y_0 + (2\times 3^{n+1} - 3\times 2^{n+1})y_0 + (-3^{n+1} + 2^{n+2})z_0 \end{cases}$

EXERCICE 2

On se place dans $\mathbb{C}[X]$, et on note

$$A = X^4 - 1 \qquad \text{et} \qquad B = X^4 - X$$

On note f l'application qui à un polynôme P de $\mathbb{C}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par B.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$.

Par définition de la division euclidienne de deux polynômes, on a le degré du reste strictement inférieur au degré du diviseur. On a donc $\deg(f(P)) < \deg(B)$ donc f est à valeurs dans $\mathbb{C}_3[X]$.
De plus, $\forall(\lambda, P, Q) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}_3[X]^2$, on note $AP = BQ_1 + R_1$ et $AQ = BQ_2 + R_2$ avec $\deg(R_1) \leq 3$ et $\deg(R_2) \leq 3$ les divisions euclidiennes de AP et AQ par B.
On a : $A(\lambda P + Q) = B(\lambda Q_1 + Q_2) + \lambda R_1 + R_2$ avec $\deg(\lambda R_1 + R_2) \leq \max(\deg(\lambda R_1), \deg(R_2)) \leq 3$.
Par unicité de la division euclidienne, on en déduit que $f(\lambda P + Q) = \lambda R_1 + R_2 = \lambda f(P) + f(Q)$ donc que f est linéaire.
Finalement, on a bien $f \in \mathscr{L}(\mathbb{C}_3[X])$.

2. Déterminer le noyau de f.

$P \in \mathrm{Ker}(f)$ si, et seulement si le reste de la division euclidienne de AP par B est nul donc si B divise AP.
0 et 1 sont des racines évidentes de B, et on obtient directement dans $\mathbb{R}[X]$ la factorisation $B = X(X-1)(X^2+X+1)$; les racines de A sont les racines quatrièmes de l'unité et on obtient directement dans $\mathbb{R}[X]$ la factorisation $A = (X-1)(X+1)(X^2+1)$. On a donc :
$P \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{C}_3[X], (X-1)(X+1)(X^2+1)P = X(X-1)(X^2+X+1)Q$
$\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{C}_3[X], (X+1)(X^2+1)P = X(X^2+X+1)Q \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, P = \lambda X(X^2+X+1)$

car $-1, \mathrm{i}$ et $-\mathrm{i}$ ne sont pas des racines de $X(X^2+X+1)$ donc ce sont des racines de Q et P est de degré au plus 3.
On en déduit que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\{X^3+X^2+X\}$.

3. Quelle est la dimension de $\mathrm{Im}(f)$? Montrer que $\mathrm{Im}(f) = (X-1)\mathbb{C}_2[X]$.

Le théorème du rang donne $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 4-1 = 3$.
De plus $f(X^0) = X-1, f(X) = X^2-X = X(X-1), f(X^2) = X^3-X^2 = X^2(X-1)$;
ces polynômes formant une famille de polynômes de $\mathrm{Im}(f)$ échelonnée en degrés et de cardinal 3, ils en constituent donc une base. Ainsi tout vecteur de $\mathrm{Im}(f)$ en est une combinaison linéaire et donc s'écrit sous la forme $(X-1)(a+bX+cX^2)$ ce qui donne le résultat attendu.

4. Déterminer les quatre racines z_1, z_2, z_3 et z_4 de B.

Les racines de B sont $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = \mathrm{j}$ et $z_4 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = \bar{\mathrm{j}}$.

5. Montrer qu'en posant $P_k = \dfrac{B}{X-z_k}$ pour $k \in [\![1,4]\!]$, la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de $\mathbb{C}_3[X]$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{C}^4$.
$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 = 0 \Rightarrow \forall n \in [\![1,4]\!], \lambda_1 P_1(z_n) + \lambda_2 P_2(z_n) + \lambda_3 P_3(z_n) + \lambda_4 P_4(z_n) = 0$
Pour $n \in [\![1,4]\!]$, z_n est racine de P_k si et seulement si $n \neq k$, on a donc $\forall n \in [\![1,4]\!], \lambda_n = 0$.
Ainsi la famille est libre, de cardinal 4, c'est donc une base de $\mathbb{C}_3[X]$.

6. Montrer que $f(P_k) = (z_k-1)P_k$, et en déduire la matrice de f dans la base (P_1, P_2, P_3, P_4).

On a $A = B + X - 1$ donc pour $k \in [\![1,4]\!], AP_k = BP_k + XP_k - P_k$ et $(X-z_k)P_k = B$.
On en déduit que $AP_k = BP_k + B + z_k P_k - P_k = (P_k+1)B + (z_k-1)P_k$,
avec $z_k - 1 = 0$ si $k = 2$ et $\deg((z_k-1)P_k) \leq \deg(P_k) < \deg(B)$ sinon ; c'est donc la division euclidienne de AP_k par B et on a $f(P_k) = (z_k-1)P_k$.
On en déduit la matrice de f dans la base (P_1, P_2, P_3, P_4) :

$$\mathrm{mat}_{(P_1,P_2,P_3,P_4)}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{j}-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\mathrm{j}}-1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 3

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct.
On considère la droite $\mathscr{D}$ admettant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

On note H le projeté orthogonal de O, centre du repère, sur $\mathscr{D}$.

1a. Expliciter la distance $d(t)$ du point O au point $M(t)$ de $\mathscr{D}$ de paramètre t .

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad d(t) = \sqrt{(4+2t)^2 + (3+t)^2 + (1+t)^2} = \sqrt{6t^2 + 24t + 26}.$$

b. Déterminer la valeur de t pour laquelle la distance précédente est minimale. On la note t_0. A quoi correspond le point $M(t_0)$ de $\mathscr{D}$ ainsi déterminé ?

La distance est minimale lorsque $6t^2 + 24t + 26$ est minimal, c'est-à-dire pour t tel que $12t + 24 = 0$, soit $t_0 = -2$. $M(-2)$ est le point H.

2a. Montrer que le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x - 2z - 2 = 0$ contient la droite $\mathscr{D}$.

$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (4 + 2t) - 2(1 + t) = 2$ donc les coordonnées des points de $\mathscr{D}$ vérifient l'équation de $\mathscr{P}$ d'où $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}$.

b. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{R}$ contenant $\mathscr{D}$ et perpendiculaire à $\mathscr{P}$.
On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si les vecteurs normaux de l'un sont orthogonaux aux vecteurs normaux de l'autre.

On note $\mathscr{D} = S + \text{Vect}(\overrightarrow{u})$ où S est le point de coordonnées $(4; 3; 1)$ et $\overrightarrow{u}$ le vecteur de coordonnées $(2; 1; 1)$.
Le plan $\mathscr{R}$ contenant $\mathscr{D}$, il passe par le point S et admet le vecteur $\overrightarrow{u}$ pour vecteur directeur.
Comme il est perpendiculaire à $\mathscr{P}$ le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1; 0; -2)$ normal à $\mathscr{P}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{R}$.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ n'étant clairement pas colinéaires, le plan $\mathscr{R}$ admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{n}$ qui a pour coordonnées $(-2; 5; -1)$.
Finalement, $\mathscr{R}$ admet pour équation cartésienne $-2(x - 4) + 5(y - 3) - (z - 1) = 0$ soit encore : $2x - 5y + z + 6 = 0$.

c. Calculer les distances de O à $\mathscr{P}$ et de O à $\mathscr{R}$.

$$\text{d}(O, \mathscr{P}) = \frac{|-2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \text{d}(O, \mathscr{R}) = \frac{|6|}{\sqrt{2^2 + 5^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{30}}.$$

d. On note A et A' les projetés orthogonaux de O sur $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ respectivement.
Justifier que les points O, A, A' et H sont coplanaires et donner la nature du quadrilatère $OAHA'$.

Par construction, le vecteur $\overrightarrow{u}$ précédemment donné (qui dirige $\mathscr{D}$) est orthogonal à $\overrightarrow{OA}$, à $\overrightarrow{OA'}$ et à $\overrightarrow{OH}$. On en déduit que les points O, A, A' et H sont dans un plan orthogonal à $\mathscr{D}$.
De plus, (OA) est orthogonale à $\mathscr{P}$ donc à (AH) et (OA') est orthogonale à $\mathscr{R}$ donc à $(A'H)$. On en déduit que le quadrilatère $OAHA'$ est un rectangle.

3. Calculer la distance de O à $\mathscr{D}$ des trois façons suivantes :

a. en utilisant la formule de la distance d'un point à une droite figurant dans le cours ;
$$\text{d}(O, \mathscr{D}) = \frac{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OA}\|}{\|\overrightarrow{u}\|} = \frac{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-2)^2}}{\sqrt{2^2 + 1 + 1}} = \sqrt{2}.$$

b. en utilisant la question **1** ;

Le point H est $M(-2)$; il a pour coordonnées $(0, 1, -1)$; on a : $\text{d}(O, \mathscr{D}) = OH = \sqrt{2}$.

c. en utilisant la question **2**.
Dans le rectangle $OAHA'$, le théorème de Pythagore donne :
$$\text{d}(O, \mathscr{D}) = OH = \sqrt{OA'^2 + OA^2} = \sqrt{\text{d}\,(O, \mathscr{P})^2 + \text{d}\,(O, \mathscr{R})^2} = \sqrt{2}.$$

PROBLÈME

On s'intéresse à la fonction zêta de Riemann, une fonction définie par la relation suivante :

$$\forall \alpha \in]1,+\infty[, \quad \zeta(\alpha)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$$

La première partie contient des résultats qui seront exploités dans les deux autres.

Dans la deuxième partie, on prouve l'existence de $\zeta(\alpha)$ puis dans la suivante, on montre que :

$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Partie I : résultats préliminaires

1. Trigonométrie

Soient a, b dans $\mathbb{R}$. Déterminer la partie imaginaire de $e^{ia}e^{ib}$ de deux façons, puis montrer que

$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$$

En déduire que

$$\sin(a)\cos(b)=\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$$

$e^{ia}e^{ib}=(\cos(a)+i\sin(a))(\cos(b)+i\sin(b))$ donc $\operatorname{Im}\left(e^{ia}e^{ib}\right)=\cos(a)\sin(b)+\sin(a)\cos(b)$.
De plus, $e^{ia}e^{ib}=e^{i(a+b)}$ donc $\operatorname{Im}\left(e^{ia}e^{ib}\right)=\sin(a+b)$.
On en déduit la première égalité, par unicité de la partie imaginaire d'un nombre complexe.
De celle-ci on obtient : $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(-b)+\cos(a)\sin(-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$, puis par somme : $\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin(a)\cos(b)$ d'où la deuxième égalité.

2. Arc moitié

Pour $\theta\in\mathbb{R}$, écrire $e^{i\theta}-1$ et $e^{i\theta}+1$ sous la forme $\rho e^{i\alpha}$ avec $\rho,\alpha\in\mathbb{R}$.

$e^{i\theta}+1=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)=e^{i\frac{\theta}{2}}2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

et $\quad e^{i\theta}-1=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)=e^{i\frac{\theta}{2}}2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$

3. Méthode des rectangles

Soit f une fonction continue et décroissante sur $[1,+\infty[$. Montrer que :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*, \quad f(k+1)\leq\int_k^{k+1}f(t)\mathrm{d}t\leq f(k)$$

et en déduire, à l'aide d'une intégrale de f, un encadrement de

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)$$

f étant une fonction décroissante, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $\forall t \in [k, k+1], f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$ donc, par croissance de l'intégrale : $f(k+1) \leq \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leq f(k)$.
En sommant membres à membres, et en appliquant la relation de Chasles, on obtient pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leq \int_1^n f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$.
Un changement d'indice dans la première somme permet d'obtenir : $S_n - f(1) \leq \displaystyle\int_0^n f(t)\mathrm{d}t \leq S_n - f(n)$ puis :

$$\int_1^n f(t)\mathrm{d}t + f(n) \leq S_n \leq \int_1^n f(t)\mathrm{d}t + f(1)$$

4. $\boxed{\text{Lemme de Riemann-Lebesgue}}$

Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b], \mathbb{R})$, avec $a \leq b$, et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que :

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{\lambda}\left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t\right)$$

et en déduire que :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t = 0$$

f étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ de même que la fonction $t \mapsto -\dfrac{\cos(\lambda t)}{\lambda}$ le théorème d'intégration par parties donne :
$\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda} f(t)\right]_a^b + \int_a^b f'(t)\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda}\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\left(f(a)\cos(\lambda a) - f(b)\cos(\lambda b) + \int_a^b f'(t)\cos(\lambda t)\mathrm{d}t\right)$.
On a donc : $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{\lambda}\left(|f(a)\cos(\lambda a)| + |f(b)\cos(\lambda b)| + \int_a^b |f'(t)\cos(\lambda t)|\,\mathrm{d}t\right)$
puis, en majorant le cosinus par 1 : $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{\lambda}\underbrace{\left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t\right)}_{M}$.

On a $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{M}{\lambda} = 0$ donc le théorème d'encadrement donne $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t = 0$.

Partie II : existence de $\zeta(2)$

Soit $\alpha > 1$. On souhaite montrer que $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

Pour $\alpha > 1$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$ donc d'après la méthode des rectangles, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$S_n \leq \displaystyle\int_1^n \frac{1}{t^\alpha} + 1 = \underbrace{\frac{1}{(1-\alpha)\,n^{\alpha-1}}}_{\leq 0} + \frac{1}{\alpha - 1} + 1 \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1}$.

2. En déduire que $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge, et que sa somme notée $\zeta(\alpha)$ est dans $\left[\dfrac{1}{\alpha-1}, \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\right]$.

S_n est la somme partielle d'une série positive, et elle est majorée donc la série converge et sa somme est majorée par $\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$.

La méthode des rectangles donne également : $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t+\frac{1}{n^\alpha}\leq S_n$ d'où $\dfrac{1}{\alpha-1}-\dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}+\dfrac{1}{n^\alpha}\leq S_n$,

Ainsi, par passage à la limite, on obtient : $\dfrac{1}{\alpha-1}\leq \displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Finalement, on a bien la convergence de la série et l'encadrement de sa somme.

Partie III : un calcul de $\zeta(2)$

1a. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, calculer :

$$\int_0^\pi t\cos(nt)\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_0^\pi t^2\cos(nt)\mathrm{d}t$$

On pourra intégrer par parties.

Les fonctions $t\mapsto t, t\mapsto t^2, t\mapsto \dfrac{\sin(nt)}{n}$ et $t\mapsto -\dfrac{\cos(nt)}{n}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$ donc le théorème d'intégration par parties donne :

$\displaystyle\int_0^\pi t\cos(nt)\mathrm{d}t=\left[\frac{\sin(nt)}{n}t\right]_0^\pi-\frac{1}{n}\int_0^\pi \sin(nt)\mathrm{d}t=\frac{1}{n^2}\left[\cos(nt)\right]_0^\pi=\frac{(-1)^n-1}{n^2}$

$\displaystyle\int_0^\pi t^2\cos(nt)\mathrm{d}t=\left[\frac{\sin(nt)}{n}t^2\right]_0^\pi-\frac{2}{n}\int_0^\pi t\sin(nt)\mathrm{d}t=-\frac{2}{n}\left(\left[-\frac{\cos(nt)}{n}t\right]_0^\pi+\frac{1}{n}\int_0^\pi\cos(nt)\mathrm{d}t\right)=\frac{2\pi}{n^2}(-1)^n-\frac{2}{n^3}\left[\sin(nt)\right]_0^\pi=\frac{2\pi}{n^2}(-1)^n$

b. Trouver alors deux réels a et b tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \int_0^\pi (at^2+bt)\cos(nt)\mathrm{d}t=\frac{1}{n^2}$$

$a=\dfrac{1}{2\pi}$ et $b=-1$.

2. Soient $n\in\mathbb{N}^*, t\in\mathbb{R}$ et

$$C_n(t)=\sum_{k=1}^n\cos(kt)$$

Montrer que pour $t\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$:

$$C_n(t)=-\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Pour $t\in\mathbb{R}\setminus2\pi\mathbb{Z}$, on a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\neq 1$ d'où, en utilisant le résultat **I.2**, pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$\displaystyle C_n(t)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\right)=\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\right)=\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{nt}{2}}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}}\right)=\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$

d'où, en utilisant **I.2** : $C_n(t)=\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)-\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

3. En déduire que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}+\int_0^\pi\varphi(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t$$

où φ est une fonction définie et continue sur $[0,\pi]$ que l'on précisera.

D'après la question **III.1.b** et par linéarité de l'intégrale on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) \mathrm{d}t \right) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) C_n(t) \mathrm{d}t$$

D'après la question **III.2.**, pour $t \in]0, \pi], C_n(t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ avec $\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{\frac{2n+1}{2}t}{2\frac{t}{2}}$,

ainsi $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = n + \frac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{t \to 0} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right) = C_n(0)$.

On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \underbrace{-\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \mathrm{d}t}_{\frac{\pi^2}{6}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \mathrm{d}t}_{\int_0^{\pi} \varphi(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) \mathrm{d}t}$$

avec $\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) & \text{si } t \neq 0 \\ -1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

Par les théorèmes généraux, φ est continue sur $]0, \pi]$ et comme $\sin(t) \underset{t \to 0}{\sim} t$ on a $\varphi(t) \underset{t \to 0}{\sim} -1$ donc φ est continue en 0.

4. Montrer que la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

Par les théorèmes généraux, la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \pi]$.

De plus, pour $t \in]0, \pi], \varphi'(t) = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}$, d'où :

$$\varphi'(t) \underset{t \to 0}{=} \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\left(\frac{t}{2} + o(t^2)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)(1 + o(t))}{\left(\frac{t}{2} + o(t)\right)^2} \underset{t \to 0}{=} \frac{1}{2} \frac{\frac{t^2}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4\pi} + \frac{t}{2} + o(t^2)}{\frac{t^2}{4}(1 + o(1))} \underset{t \to 0}{=} \frac{1}{2\pi} + o(1).$$

On déduit du théorème de la limite de la dérivée que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

5. Conclure.

Le lemme de Riemann-Lebesgue donne $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) \mathrm{d}t = 0$ et par suite

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$