CB N°10 - ESPACES VECTORIELS - SUJET 1

EXERCICE 1

Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) où $u_1 = (1; 1; 2), u_2 = (0; 1; 1), u_3 = (1; 2; 3)$ et $u_4 = (1; -1; 0)$ est une famille génératrice du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation : $x + y - z = 0$.
En extraire une base.
On a $u_3 = u_1 + u_2, u_4 = u_1 - 2u_2$ et les vecteurs u_1 et u_2 ne sont clairement pas colinéaires.
Ainsi (u_1, u_2) constitue une base de la famille engendrée par (u_1, u_2, u_3, u_4).
On note $P = \left\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\right\}$. $(x; y; z) \in P \Leftrightarrow z = x + y \Leftrightarrow (x; y; z) = xu_1 + (y - x)u_2$.
On en déduit que (u_1, u_2) est une base de P.

EXERCICE 2

On considère les trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :
$F = \left\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0\right\}$
$G = \left\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z = 0\right\}$
$H = \text{Vect}\left((1; -1; -1), (0; 1; 2), (3; -1; 1)\right)$

1. Donner une base de F, de G et de H.
$F = \text{Vect}\left((1; 0; 1), (0; 1; 2)\right), G = \text{Vect}\left((-2; 1; 3)\right), H = \text{Vect}\left((1; -1; -1), (0; 1; 2)\right)$.

2. Prouver que $F = H$.
Les coordonnées des vecteurs qui engendrent H vérifient l'équation du sev F donc $H \subset F$.
L'égalité des dimensions donne l'égalité des sev.

3. Prouver que F et G sont supplémentaires.
$\text{rg}\left\{(1; 0; 1), (0; 1; 2), (-2; 1; 3)\right\} = 3$; on en déduit que F et G sont supplémentaires.

EXERCICE 3

Dans $\mathbb{R}^3$, pour $m \in \mathbb{R}$ on considère les vecteurs $v_1 = (1; 1; 2m), v_2 = (2; 0; -1)$ et $v_3 = (m; m; 2)$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de $m \in \mathbb{R}$, la famille (v_1, v_2, v_3) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2m \\ 2 & 0 & -1 \\ m & m & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2m \\ 0 & -2 & -1-4m \\ 0 & 0 & 2-2m^2 \end{pmatrix}.$$
On en déduit que la famille est une base si et seulement si $m^2 \neq 1$ (lorsque la matrice est de rang 3).

2. On suppose désormais que $m = -1$.
Montrer que $\text{Vect}(v_1, v_2) = \text{Vect}(v_2, v_3)$, puis en donner une équation cartésienne.
Lorsque $m = -1$, la famille est liée. v_1 et v_2 n'étant clairement pas colinéaires, tout comme v_2 et v_3 on en déduit que ces deux paires de vecteurs forment des bases de $\text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ et donc que $\text{Vect}(v_1, v_2) = \text{Vect}(v_2, v_3)$.
On trouve une équation cartésienne à l'aide du produit vectoriel de v_1 et v_2 : $x + 3y + 2z = 0$.

EXERCICE 4

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $F = \text{Vect}\left((t; 0; 2), (0; t; 1)\right)$ et $G = \text{Vect}((1; 2; 1))$.
Calculer les dimensions de $F, F \cap G$ et $F + G$ en fonction de $t \in \mathbb{R}$.
A l'aide d'un produit vectoriel, on constate que $(t; 0; 2)$ et $(0; t; 1)$ sont colinéaires si, et seulement si $t = 0$.

$\leadsto$ Si $t = 0$ alors $\dim(F) = 1$; les vecteurs $(0; 0; 1)$ (qui engendre F) et $(1; 2; 1)$ (qui engendre G) n'étant clairement pas colinéaires, on en déduit que $\dim(F \cap G) = 0$ et $\dim(F + G) = 2$.

$\leadsto$ Si $t \neq 0$ alors $\dim(F) = 2$. De plus $\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & t & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 2-t \\ 0 & 0 & t^2-4t \end{pmatrix}$.
On en déduit (t étant non nul) que si $t = 4$ alors $G \subset F$ donc $\dim(F \cap G) = 1$ et $\dim(F + G) = 2$ et si $t \neq 4$, alors $\dim(F \cap G) = 0$ et $\dim(F + G) = 3$.

EXERCICE 5

Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère $F = \{P \in E, P(1) = P(-1) = 0\}$ et $G = \{P \in E, P(-X) = -P(X)\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, et en déterminer des bases.

$P \in F \Leftrightarrow \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2, P = (aX+b)(X-1)(X+1)$ donc $F = \text{Vect}\left((X-1)(X+1), X(X-1)(X+1)\right)$;
les deux polynômes étant échelonnées en degré, ils constituent une base de F.
$P \in G \Leftrightarrow \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2, P = aX^3 + bX$ donc $G = \text{Vect}\left(X, X^3\right)$;
les polynômes étant extraits de la base canonique, ils constituent une base de G

2. F et G sont-ils supplémentaires ?

$X(X^2-1) \in F \cap G$; on en déduit que F et G ne sont pas supplémentaires.

EXERCICE 6

Dans $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on considère $F = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E, a+d = 0, b+c = 0\right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en déterminer une base.

$M \in F \Leftrightarrow \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2, M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; on en déduit que $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

2. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

$G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est un supplémentaire de F dans E.

EXERCICE 7

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère une droite vectorielle $\mathscr{D}$ et un plan vectoriel $\mathscr{P}$ tels que $\mathscr{D} \not\subseteq \mathscr{P}$.
Montrer que $\mathscr{D} \oplus \mathscr{P} = \mathbb{R}^3$.
$\mathscr{D} \not\subseteq \mathscr{P}$ donc il existe $a \in \mathscr{D}$ tel que $a \notin \mathscr{P}$.
$\mathscr{D}$ étant une droite vectorielle, on a : $\mathscr{D} = \text{Vect}(a)$ avec $a \notin \mathscr{P}$ donc $\mathscr{P} \cap \text{Vect}(a) = \{0\}$.
Enfin, $\mathscr{P}$ étant de dimension 2, on en déduit que $\mathscr{P} \oplus \text{Vect}(a) = \mathbb{R}^3$.

CB n°10 - Espaces vectoriels - Sujet 2

EXERCICE 1

Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) où $u_1 = (-1; 1; 1), u_2 = (2; 1; -1), u_3 = (1; 2; 0)$ et $u_4 = (3; 3; -1)$ est une famille génératrice du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation : $2x - y + 3z = 0$.
En extraire une base.
On a $u_3 = u_1 + u_2, u_4 = u_2 + 2u_3$ et les vecteurs u_1 et u_2 ne sont clairement pas colinéaires.
Ainsi (u_1, u_2) constitue une base de la famille engendrée par (u_1, u_2, u_3, u_4).
On note $P = \left\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y + 3z = 0\right\}$.
$(x; y; z) \in P \Leftrightarrow y = 2x + 3z \Leftrightarrow (x; y; z) = (x + 2z)u_1 + (x + z)u_2$.
On en déduit que (u_1, u_2) est une base de P.

EXERCICE 2

On considère les trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :
$F = \left\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3, x - 3y + z = 0\right\}$
$G = \left\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3, x + y + 2z = 0 \text{ et } 2x + y = 0\right\}$
$H = \text{Vect}\left((2; 1; 1), (-1; 0; 1), (3; 1; 0)\right)$

1. Donner une base de F, de G et de H. $F = \text{Vect}\left((3; 1; 0), (-1; 0; 1)\right), G = \text{Vect}\left((2; -4; 1)\right), H = \text{Vect}\left((2; 1; 1), (-1; 0; 1)\right)$.
2. Prouver que $F = H$.
Les coordonnées des vecteurs qui engendrent H vérifient l'équation du sev F donc $H \subset F$.
L'égalité des dimensions donne l'égalité des sev.
3. Prouver que F et G sont supplémentaires.
$\text{rg}\left\{(3; 1; 0), (-1; 0; 1), (2; -4; 1)\right\} = 3$; on en déduit que F et G sont supplémentaires.

EXERCICE 3

Dans $\mathbb{R}^3$, pour $m \in \mathbb{R}$ on considère les vecteurs $v_1 = (1; 0; -2), v_2 = (2; -1; m)$ et $v_3 = (1; m; 1)$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de $m \in \mathbb{R}$, la famille (v_1, v_2, v_3) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & m \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 4 + m \\ 0 & 0 & m^2 + 4m + 3 \end{pmatrix}$.
On en déduit que la famille est une base si et seulement si $m \notin \{-1; -3\}$ (lorsque la matrice est de rang 3).
2. **On suppose désormais que** $m = -1$.
Montrer que $\text{Vect}(v_1, v_2) = \text{Vect}(v_2, v_3)$, puis en donner une équation cartésienne.
Lorsque $m = -1$, la famille est liée. v_1 et v_2 n'étant clairement pas colinéaires, tout comme v_2 et v_3 on en déduit que ces deux paires de vecteurs forment des bases de $\text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ et donc que $\text{Vect}(v_1, v_2) = \text{Vect}(v_2, v_3)$.
On trouve une équation cartésienne à l'aide du produit vectoriel de v_1 et v_2 : $2x + 3y + z = 0$.

EXERCICE 4

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $F = \text{Vect}\left((t; 0; 2), (1; t; -1)\right)$ et $G = \text{Vect}((2; 1; 1))$.
Calculer les dimensions de $F, F \cap G$ et $F + G$ en fonction de $t \in \mathbb{R}$.
$\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ t + 2 \\ t^2 \end{pmatrix}$. On en déduit que les vecteurs $(t; 0; 2)$ et $(1; t; -1)$ ne sont jamais colinéaires.
Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\dim(F) = 2$.
$\det\left((t; 0; 2), (1; t; -1), (2; 1; 1)\right) = \begin{pmatrix} -2t \\ t + 2 \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = t^2 - 3t + 2$.

Ainsi, pour $t \notin \{1;2\}, F \cap G = \{0\}$ donc $\dim(F \cap G) = 0$ et $\dim(F+G) = 3$ (par la formule de Grassman) ;
sinon $G \subset F$ donc $\dim(F \cap G) = \dim(G) = 1$ et $\dim(F+G) = \dim(F) = 2$.

EXERCICE 5

Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère $F = \{P \in E, P(1) = P(2) = 0\}$ et $G = \{P \in E, P(X) = P(-X)\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et en déterminer des bases.
$P \in F \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, P = (aX+b)(X-1)(X-2)$ donc $F = \text{Vect}\left((X-1)(X-2), X(X-1)(X-2)\right)$;
les deux polynômes étant échelonnés en degré, ils constituent une base de F.
$P \in G \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, P = aX^2 + b$ donc $G = \text{Vect}\left(X^0, X^2\right)$;
les deux polynômes étant extraits de la base canonique, ils constituent bien une base de G.

2. Montrer que $F \oplus G = E$.
Si $P \in F \cap G$ il admet $1, 2, -1$ et -2 pour racines. Comme il est de degré au plus 3, il ne peut avoir plus de trois racines à moins d'être nul. Ainsi $F \cap G = \{0\}$ et comme $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ on en déduit qu'ils sont supplémentaires.

EXERCICE 6

Dans $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on considère $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ et $G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$,
$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+d \\ b-d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = b = c = d = 0.$
On en déduit que la concaténation de la famille génératrice de F et de celle de G donne une famille libre ; comme elle est de cardinal 4, c'est une base de E, donc F et G sont supplémentaires.

EXERCICE 7

Dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) on considère deux hyperplans H_1 et H_2 distincts (c'est-à-dire deux sous-espaces vectoriels distincts ayant chacun pour dimension $n-1$).
Montrer que $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$
$H_1 \neq H_2$ donc $\exists a \in H_1$ tel que $a \notin H_2$. On en déduit que $H_2 \oplus \text{Vect}(a) = E$ (car $H_2 \cap \text{Vect}(a) = \{0\}$ et $\dim(\text{Vect}(a)) + \dim H_2 = n$.
Ainsi $E = \text{Vect}(a) + H_2 \subset H_1 + H_2 \subset E$ donc $\dim(H_1 + H_2) = n$.
On a donc, par la formule de Grassman : $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 + H_2) = n - 2$.