CB n°10 - Espaces vectoriels - Sujet 1

EXERCICE 1
Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) où $u_1 = (1;1;2), u_2 = (0;1;1), u_3 = (1;2;3)$ et $u_4 = (1;-1;0)$ est une famille génératrice du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation : $x + y - z = 0$.
En extraire une base.

EXERCICE 2
On considère les trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :
$F = \left\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0\right\}$
$G = \left\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z = 0\right\}$
$H = \mathrm{Vect}\left((1;-1;-1),(0;1;2),(3;-1;1)\right)$

1. Donner une base de F, de G et de H.

2. Prouver que $F = H$.

3. Prouver que F et G sont supplémentaires.

EXERCICE 3
Dans $\mathbb{R}^3$, pour $m \in \mathbb{R}$ on considère les vecteurs $v_1 = (1;1;2m), v_2 = (2;0;-1)$ et $v_3 = (m;m;2)$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de $m \in \mathbb{R}$, la famille (v_1, v_2, v_3) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

2. **On suppose désormais que $m = -1$.**
Montrer que $\mathrm{Vect}(v_1, v_2) = \mathrm{Vect}(v_2, v_3)$, puis en donner une équation cartésienne.

EXERCICE 4
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $F = \mathrm{Vect}\left((t;0;2),(0;t;1)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}((1;2;1))$.
Calculer les dimensions de $F, F \cap G$ et $F + G$ en fonction de $t \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 5
Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère $F = \{P \in E, P(1) = P(-1) = 0\}$ et $G = \{P \in E, P(-X) = -P(X)\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et en déterminer des bases.

2. F et G sont-ils supplémentaires ?

EXERCICE 6
Dans $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on considère $F = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E, a + d = 0, b + c = 0\right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en déterminer une base.

2. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

EXERCICE 7
Dans $\mathbb{R}^3$ on considère une droite vectorielle $\mathscr{D}$ et un plan vectoriel $\mathscr{P}$ tels que $\mathscr{D} \not\subseteq \mathscr{P}$.
Montrer que $\mathscr{D} \oplus \mathscr{P} = \mathbb{R}^3$.

CB n°10 - Espaces vectoriels - Sujet 2

EXERCICE 1
Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) où $u_1 = (-1;1;1), u_2 = (2;1;-1), u_3 = (1;2;0)$ et $u_4 = (3;3;-1)$ est une famille génératrice du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation : $2x - y + 3z = 0$.
En extraire une base.

EXERCICE 2
On considère les trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :
$F = \left\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3, x - 3y + z = 0\right\}$
$G = \left\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3, x + y + 2z = 0 \text{ et } 2x + y = 0\right\}$
$H = \text{Vect}\left((2;1;1), (-1;0;1), (3;1;0)\right)$

1. Donner une base de F, de G et de H.

2. Prouver que $F = H$

3. Prouver que F et G sont supplémentaires.

EXERCICE 3
Dans $\mathbb{R}^3$, pour $m \in \mathbb{R}$ on considère les vecteurs $v_1 = (1;0;-2), v_2 = (2;-1;m)$ et $v_3 = (1;m;1)$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de $m \in \mathbb{R}$, la famille (v_1, v_2, v_3) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

2. **On suppose désormais que $m = -1$.**
Montrer que $\text{Vect}(v_1, v_2) = \text{Vect}(v_2, v_3)$, puis en donner une équation cartésienne.

EXERCICE 4
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $F = \text{Vect}\left((t;0;2), (1;t;-1)\right)$ et $G = \text{Vect}((2;1;1))$.
Calculer les dimensions de $F, F \cap G$ et $F + G$ en fonction de $t \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 5
Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère $F = \{P \in E, P(1) = P(2) = 0\}$ et $G = \{P \in E, P(X) = P(-X)\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, et en déterminer des bases.

2. Montrer que $F \oplus G = E$.

EXERCICE 6
Dans $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on considère $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ et $G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

EXERCICE 7
Dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ on considère deux hyperplans H_1 et H_2 distincts (c'est-à-dire deux sous-espaces vectoriels distincts ayant chacun pour dimension $n-1$).
Montrer que $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$