# CB n°3 - Nombres complexes - Sujet 1

**1a. Question de cours**
A l'aide des formules d'Euler, montrer que pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\cos(a)\ \cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$$

**b.** Donner les formes trigonométriques des nombres complexes :

$$z_1 = 1+\sqrt{3}\mathrm{i} \quad = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i} \quad = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

**c.** Donner la forme trigonométrique du nombre complexe $\dfrac{z_1}{z_2}$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$

Par ailleurs, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Comme $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) \equiv \dfrac{\pi}{12}[2\pi]$, on en déduit que $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

**d.** A l'aide de la formule de l'arc moitié, donner la forme trigonométrique du nombre complexe $z_1+z_2$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{24}\right)$.

$z_1+z_2 = 2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right) = 2\times 2\cos\left(\dfrac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}}{2}} = 4\cos\left(\dfrac{\pi}{24}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{24}}$.

$\cos\left(\dfrac{\pi}{24}\right) > 0$ donc c'est bien la forme trigonométrique de $z_1+z_2$.

On a par ailleurs, $z_1+z_2 = \left(1+\sqrt{2}\right)+\mathrm{i}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$.

Comme $\cos\left(\dfrac{\pi}{24}\right) = \dfrac{|z_1+z_2|}{4}$, on en déduit que $\cos\left(\dfrac{\pi}{24}\right) = \dfrac{\sqrt{(1+\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}}{4} = \dfrac{\sqrt{8+2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}}{4}$

**e.** Vérifier le résultat précédent en utilisant la question **c.** et une formule de duplication du cosinus ($\cos(2a) = \cdots$).

$\cos\left(2\times\dfrac{\pi}{24}\right) = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{24}\right)-1$ donc $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{24}\right) = \dfrac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}+1}{2}$ et comme $\cos\left(\dfrac{\pi}{24}\right) > 0$, on obtient bien $\cos\left(\dfrac{\pi}{24}\right) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+4}{8}} = \dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}+8}}{4}$

**2.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ :

$$\left(1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)z^n = 2$$

$\left(1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)z^n = 2 \Leftrightarrow z^n = \dfrac{2}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}} = \dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ donc $S = \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in [\![0;n-1]\!]\right\}$

**3.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante, après avoir montré qu'elle admet une solution réelle :

$$2z^3+(5-4\mathrm{i})z^2+(8+2\mathrm{i})z+3+2\mathrm{i} = 0$$

Si $x \in \mathbb{R}$ est solution, alors $-4x^2+2x+2 = 0$ ; ainsi, $x \in \left\{-\dfrac{1}{2};1\right\}$.

$-\dfrac{1}{2}$ vérifie bien l'équation, qui s'écrit alors $(2z+1)(z^2+(2-2\mathrm{i})z+3+2\mathrm{i}) = 0$

La résolution de l'équation du second degré donne : $S = \left\{-\frac{1}{2}; -2+3\mathrm{i}; -\mathrm{i}\right\}$
(avec $\Delta = -12-16\mathrm{i} = -4(3+4\mathrm{i}) = (2\mathrm{i}\times(2+\mathrm{i}))^2 = (-2+4\mathrm{i})^2$ )

**4.** Linéariser $\cos x \sin^3 x \quad = -\frac{1}{8}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x)$

**5.** Développer $\cos(3x)\sin(4x) \quad = 4\cos^6 x \sin x - 16\cos^4 x \sin^3 x + 12\cos^2 x \sin^5 x$

---

## CB n°3 - Nombres complexes - Sujet 2

**1a. Question de cours**
A l'aide des formules d'Euler, montrer que pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ :

$$\sin(a)\ \sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$$

**b.** Donner les formes trigonométriques des nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{3} - \mathrm{i} \quad = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\mathrm{i} \quad = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

**c.** Donner la forme trigonométrique du nombre complexe $\frac{z_1}{z_2}$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$

Par ailleurs, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Comme $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 1$ et $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$, on en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

**d.** A l'aide de la formule de l'arc moitié, donner la forme trigonométrique du nombre complexe $z_1 - z_2$ et en déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

$z_1 - z_2 = 2\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right) = 2\times 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}}{2}} = 4\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{24}}$.

$\sin\left(\frac{\pi}{24}\right) > 0$ donc c'est bien la forme trigonométrique de $z_1 - z_2$.

On a par ailleurs, $z_1 - z_2 = \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + \mathrm{i}\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Comme $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{|z_1-z_2|}{4}$, on en déduit que $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2}-1)^2}}{4} = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}}{4}$

**e.** Vérifier le résultat précédent en utilisant la question **c.** et une formule de duplication du cosinus ($\cos(2a) = \cdots$).

$\cos\left(2\times\frac{\pi}{24}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{24}\right)$ donc $\sin^2\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{1-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{2}$ et comme $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right) > 0$, on obtient bien $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{\frac{4-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}} = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}}{4}$

**2.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ :
$$\left(1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right) z^n = 2$$

$\left(1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right) z^n = 2 \Leftrightarrow z^n = \dfrac{2}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}} = \dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ donc $S = \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in [\![0; n-1]\!]\right\}$

**3.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante, après avoir montré qu'elle admet une solution réelle :

$$3z^3 + (13-6\mathrm{i})z^2 + (22-2\mathrm{i})z + 6 = 0$$

Si $x \in \mathbb{R}$ est solution, alors $-6x^2 - 2x = 0$ ; ainsi, $x \in \left\{-\dfrac{1}{3}; 0\right\}$.

$-\dfrac{1}{3}$ vérifie bien l'équation, qui s'écrit alors $(3z+1)(z^2+(4-2\mathrm{i})z+6) = 0$

La résolution de l'équation du second degré donne : $S = \left\{-\dfrac{1}{3}; -3+3\mathrm{i}; -1-\mathrm{i}\right\}$

(avec $\Delta = -12 - 16\mathrm{i} = -4 \times (3+4\mathrm{i}) = (2\mathrm{i} \times (2+\mathrm{i}))^2 = (-2+4\mathrm{i})^2$ )

**4.** Linéariser $\cos^3 x \sin x$ $\quad = \dfrac{1}{8}\sin(4x) + \dfrac{1}{4}\sin(2x)$

**5.** Développer $\cos(4x)\sin(3x)$ $\quad = 3\cos^6 x \sin x - 19\cos^4 x \sin^3 x + 9\cos^2 x \sin^5 x - \sin^7 x$