CB n°3 - Nombres complexes - Sujet 1

1a. Question de cours
A l'aide des formules d'Euler, montrer que pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\cos(a)\ \cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

b. Donner les formes trigonométriques des nombres complexes :

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\mathrm{i}$$

c. Donner la forme trigonométrique du nombre complexe $\dfrac{z_1}{z_2}$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

d. A l'aide de la formule de l'arc moitié, donner la forme trigonométrique du nombre complexe $z_1 + z_2$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{24}\right)$.

e. Vérifier le résultat précédent en utilisant la question **c.** et une formule de duplication du cosinus ($\cos(2a) = \cdots$).

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$\left(1 + \sqrt{3}\mathrm{i}\right) z^n = 2$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante, après avoir montré qu'elle admet une solution réelle :

$$2z^3 + (5 - 4\mathrm{i})z^2 + (8 + 2\mathrm{i})z + 3 + 2\mathrm{i} = 0$$

4. Linéariser $\cos x \sin^3 x$.

5. Développer $\cos(3x)\sin(4x)$.

CB n°3 - Nombres complexes - Sujet 2

1a. Question de cours
<u>A l'aide des formules d'Euler</u>, montrer que pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\sin(a)\ \sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$$

b. Donner les formes trigonométriques des nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{3} - \mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\mathrm{i}$$

c. Donner la forme trigonométrique du nombre complexe $\dfrac{z_1}{z_2}$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

d. A l'aide de la formule de l'arc moitié, donner la forme trigonométrique du nombre complexe $z_1 - z_2$ et en déduire la valeur exacte de $\sin\left(\dfrac{\pi}{24}\right)$.

e. Vérifier le résultat précédent en utilisant la question **c.** et une formule de duplication du cosinus ($\cos(2a) = \cdots$).

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$\left(1 - \sqrt{3}\mathrm{i}\right) z^n = 2$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante, après avoir montré qu'elle admet une solution réelle :

$$3z^3 + (13-6\mathrm{i})z^2 + (22-2\mathrm{i})z + 6 = 0$$

4. Linéariser $\cos^3 x \sin x$.

5. Développer $\cos(4x)\sin(3x)$.