# CB N°4 - Fonctions circulaires réciproques - Sujet 1

**1. Question de cours :**

Préciser pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$, et démontrer ce résultat.

**2.** Calculer :

**a.** $\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ **b.** $\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(-\frac{6\pi}{5}\right)\right) = \frac{\pi}{5}$

**c.** $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{5}\right)\right) = \frac{2\pi}{5}$ **d.** $\operatorname{Arcsin}\left(\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)\right) = \frac{\pi}{10}$

**3.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(2x)$$

Le domaine de validité est $[-1;1]$. Pour tout $x \in [-1;1]$, on a :

$\left(\operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(2x)\right) \implies (x = \sin(\operatorname{Arctan}(2x))) \implies (x = \tan(\operatorname{Arctan}(2x)) \times \cos(\operatorname{Arctan}(2x)))$

$\implies \left(x = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}\right) \implies \left(x = 0 \vee \sqrt{1+4x^2} = 2\right) \implies \left(x = 0 \vee x^2 = \frac{3}{4}\right)$

On effectue la synthèse de ce raisonnement (qui n'a donné que des conditions nécessaires) :

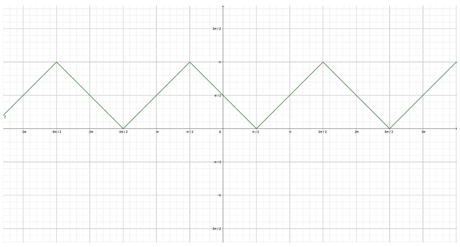
on a : $\operatorname{Arccos}(0) = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(0)$ ; $\operatorname{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

$\operatorname{Arccos}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$. D'où : $S = \left\{0; \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

**4.** Tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arccos}(\sin(x))$. On précisera la méthode.

La fonction est $2\pi$-périodique ; on peut donc l'étudier sur $[-\pi;\pi]$ puis compléter la courbe par translations.

$$\forall x \in [-\pi;\pi], \operatorname{Arccos}(\sin(x)) = \operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \begin{cases} 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{3\pi}{2} & \text{si } x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{\pi}{2} - x & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ x - \frac{\pi}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \end{cases}$$



**5.** Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

**a.** Donner le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de $f$, puis la dériver.

$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| < 1$ est toujours vérifié donc $f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

**b.** En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ pour $x$ dans le domaine de définition de $f$.

$f$ a la même dérivée que la fonction Arctan, elles diffèrent donc d'une constante.

$f(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{Arctan}(x)$.

**c.** Retrouver le résultat précédent en posant $x = \tan(\theta)$, avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

$\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ on a :

$$f(\tan(\theta)) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\tan(\theta)}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}}\right) \underbrace{=}_{\substack{\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[ \\ \Rightarrow \cos(\theta)>0}} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\tan(\theta)}{\frac{1}{\cos(\theta)}}\right) = \operatorname{Arcsin}(\sin(\theta)) \underbrace{=}_{\theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[} \theta$$

On retrouve bien $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{Arctan}(x)$.

---

# CB N°4 - Fonctions circulaires réciproques - Sujet 2

**1. Question de cours :**

Préciser pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$, et démontrer ce résultat.

**2.** Calculer :

**a.** $\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ **b.** $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{16\pi}{5}\right)\right) = \frac{4\pi}{5}$

**c.** $\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(-\frac{6\pi}{5}\right)\right) = \frac{\pi}{5}$ **d.** $\operatorname{Arccos}\left(\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)\right) = \frac{9\pi}{10}$

**3.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\operatorname{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}x)$$

Le domaine de validité est $[-1;1]$. Pour tout $x \in [-1;1]$, on a :

$$\left(\operatorname{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}x)\right) \Longrightarrow \left(x = \cos\left(\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}x)\right)\right) \Longrightarrow \left(x = \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(x \in [0;1] \wedge 2x^4 + x^2 = 1\right) \Longrightarrow \left(x = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

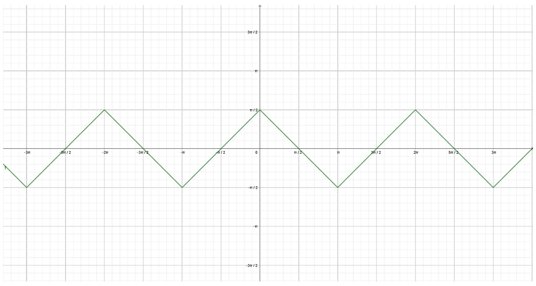
On effectue la synthèse de ce raisonnement (qui n'a donné que des conditions nécessaires) :

on a bien $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(1)$, donc $S = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

**4.** Tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arcsin}(\cos(x))$. On précisera la méthode.

La fonction est paire et $2\pi$-périodique ; on peut donc l'étudier sur $[0;\pi]$ puis compléter la courbe par symétrie et translations.

$\forall x \in [0;\pi], \operatorname{Arcsin}(\cos(x)) = \operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x$ car $(x \in [0;\pi]) \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2} - x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)$



**5.** Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \text{Arccos}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

**a.** Donner le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de $f$, puis la dériver.

$\left|\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right| \leq 1 \Leftrightarrow (1-x^2)^2 \leq (1+x^2)^2 \Leftrightarrow (1+x^2)^2 - (1-x^2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4x^2 \geq 0\,;$

cette inégalité est toujours vérifiée, avec égalité si et seulement si $x = 0$.

Ainsi, $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)|x|} = \begin{cases} -\dfrac{2}{1+x^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

**b.** En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ pour $x$ dans le domaine de définition de $f$.

$f$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues, et $f(0) = 0$. On en déduit :

$$f(x) = \begin{cases} -2\text{Arctan}(x) & \text{si } x \leq 0 \\ 2\text{Arctan}(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = 2\text{Arctan}(|x|)$$

**c.** Retrouver le résultat précédent en posant $x = \tan(\theta)$, avec $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

$\forall \theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ on a :

$$f(\tan(\theta)) = \text{Arccos}\left(\frac{1-\tan^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}\right) = \text{Arccos}(\cos(2\theta))$$

$$\underbrace{=}_{\substack{\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[ \\ \Rightarrow 2\theta \in [-\pi; \pi]}} \begin{cases} -2\theta & \text{si } \theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; 0\right] \\ 2\theta & \text{si } \theta \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[ \end{cases}$$

On retrouve ainsi le résultat précédent.